Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України «КПІ»

Н.І.Таращенко,О.П.Кузь,О.В.Дрозденко,О.В.Долянівська

Фізика

Механіка

Затверджено Вченою радою НТУУ «КПІ»
як навчальний посібник для студентів
які навчаються за спеціальностю
«Галузеве машинобудування»
та інших спеціальностей
університету

Київ 2016

УДК 531
ББК

Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ»
(протокол № 3 від 14 березня 2016 року)

Фізика – Механіка: навч. посіб./Н.І.Таращенко,О.П.Кузь,О.В.Дрозденко, О.В.Долянівська – К.:НТУУ «КПІ», 2016. – 128 с.

Електронне навчальне видання

Фізика – Механіка

Навчальний посібник

Автори: Таращенко Наталія Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузь Олександр Павлович
Дрозденко Олександра Володимирівна
Долянівська Ольга Валеріївна

Рецензенти: Лелюх Ю. І. –старший науковий співробітник,кандидат фізико-математичних наук, с.н.с
Чемерис В. Т. – доцент, кандидат технічних наук

Відповідальний редактор:
Горшков В.М.,завідуючий кафедрою, доктор фіз-мат. наук, професор

ВСТУП

Сучасна фізика – наука, яка вивчає різні форми існування матерії та закони її руху. Відомо дві форми існування матерії: у стані речовини і поля. Основною властивістю матерії є рух і уявити матерію без руху неможливо. Під рухом матерії слід розуміти будь-яку зміну стану реальності, що відбувається в природі та людському суспільстві: зміна взаємного розташування тіл у просторі, нагрівання або охолодження речовини, поширення радіохвиль, радіоактивний розпад, хімічні реакції, ріст рослин тощо.

Механіка – наука про найпростішу форму руху матерії, яка вивчає відносне переміщення тіл. Розглядаючи рух тіл, у механіці користуються різними наближеними моделями, однією з яких є модель матеріальної точки. За матеріальну точку в механіці вважають таке тіло, розміри якого неістотні за умов конкретної задачі. Наприклад, вивчаючи рух Землі навколо Сонця, Землю можна розглядати як матеріальну точку. У той самий час, розглядаючи рух штучного супутника Землі, враховуємо її розміри. Основні закони механіки складають основу сучасної фізики. Без знань цих законів неможливе розуміння процесів що відбуваються в макро та мікро світі нашої природи.

В навчальному посібнику розглядається класична механіка Ньютона та елементи релятивістської механіки.

Зміст

Розділ 1. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ

1.1. Положення матеріальної точки в просторі, траєкторія

Розглядаючи рух матеріальної точки в просторі, необхідно вибрати систему відліку. Для цього з тілом, відносно якого розглядається рух матеріальної точки, пов'язують систему координат і годинник для визначення часу.

У прямокутній системі координат (рис. 1.1) розміщення точки в просторі задається трьома координатами x, y, z або за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}$ який проводять від початку системи координат до матеріальної точки. Оскільки проекції радіуса-вектора на координатні осі дорівнюють координатам матеріальної точки x, y, z, тобто $r_x = x; r_y = y; r_z = z$, то

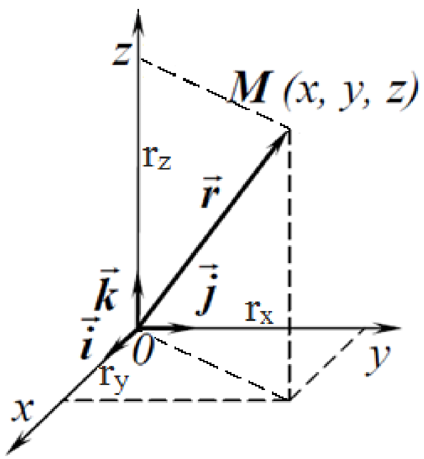

Рис. 1.1

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\,, \qquad (1.1)$$

де $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$ – одиничні вектори (орти) уздовж додатних напрямів осей x, y, z.

Модуль радіуса-вектора $\vec{r}$, тобто відстань від початку координат O до точки *M*, визначається співвідношенням

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{1.2}$$

У разі переміщення матеріальної точки в просторі її радіус-вектор змінює свій модуль, напрям (рис. 1.2) і є функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.3}$$

Функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називається векторним законом руху точки. У координатній формі цей закон можна записати у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}. \tag{1.4}$$

Кінець радіуса - вектора $\vec{r}$ у разі переміщення матеріальної точки описує в просторі деяку лінію *AaB*, яка називається траєкторією (рис. 1.2). Співвідношення (1.3) і (1.4) можна розглядати також як параметричні рівняння траєкторії (у векторній і координатній формах). Параметром служить час t.

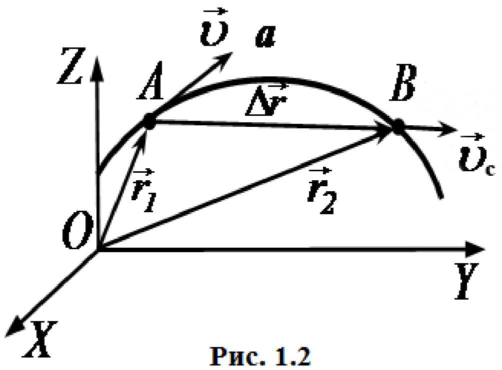

Рис. 1.2

Рівняння траєкторії в явній формі $f(x;y;z) = 0$ можна одержати із системи рівнянь (1.4), якщо з них виключити параметр t. Наприклад, із рівняння $z = z(t)$ знайдемо $t = \varphi(z)$. Підставляючи t в перші два рівняння системи (1.4), одержуємо:

$$x = x\left[\varphi(z)\right];\; y = y\left[\varphi(z)\right].$$

Залежно від форми траєкторії рух може бути прямолінійним або криволінійним. Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку, відносно якої розглядається рух. Наприклад, точка гвинта літака відносно корпусу рухається по колу, а відносно поверхні Землі – по гвинтовій лінії.

1.2. Швидкість і прискорення матеріальної точки

Припустимо, що матеріальна точка в момент часу t знаходиться в точці *A,* радіус-вектор якої $\vec{r}_1$, а в наступний момент часу $t_2 = t + \Delta t$ – у точці *B,* радіус-вектор якої $\vec{r}$. Ділянка траєкторії *AaB* є <u>шляхом</u> ΔS**,** який пройшла точка за час Δt (рис. I.2).

Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, який має напрям від початкового положення *A* матеріальної точки до наступного *B***,** називають <u>вектором переміщення.</u>

Відношення переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу, за який відбулось переміщення, називають <u>середньою швидкістю</u>:

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Вектор $\vec{v}_C$ збігається з напрямом вектора переміщення $\Delta\vec{r}$.

На окремих ділянках траєкторії можлива різна швидкість руху. Тому для більш детального опису руху доцільно користуватися поняттям миттєвої швидкості:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.6}$$

Напрям вектора миттєвої швидкості збігається з дотичною до траєкторії руху, оскільки при $\Delta t \to 0$ точка *B* прямує до точки *A*, а $|\Delta\vec{r}| \to \Delta S$.

Модуль миттєвої швидкості v

$$|\vec{v}| = v = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \tag{1.7}$$

Отже, модуль вектора швидкості дорівнює похідній шляху від часу. Вектор швидкості, як і будь-який вектор, можна виразити через його проекції v_x, v_y, v_z на координатні осі:

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z. \tag{1.8}$$

Використовуючи співвідношення (1.1), рівняння (1.6) можна записати у вигляді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\right) = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}. \tag{1.9}$$

Порівнявши (1.8) і (1.9), приходимо до висновку, що

$$v_x = \frac{dx}{dt};\; v_y = \frac{dy}{dt};\; v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.10}$$

Модуль вектора швидкості $\vec{v}$:

$$\left|\vec{v}\right| = v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,. \tag{1.11}$$

Якщо величина і напрям вектора швидкості з часом не змінюються, то такий рух називають рівномірним і прямолінійним.

У загальному випадку швидкість матеріальної точки, яка рухається, може змінюватись як за величиною, так і за напрямом. Зміну швидкості з часом характеризують фізичною величиною, яку називають прискоренням.

Припустимо, в момент часу t точка *M*, яка перебуває в положенні *A,* має швидкість $\vec{v}$ (рис. 1.3). У момент часу $t+\Delta t$, коли вона опиниться в положенні *B,* її швидкість дорівнюватиме $\vec{v}'$. Перенесемо вектор $\vec{v}$ паралельно самому собі з точки *A* в *B* і побудуємо вектор приросту швидкості $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ за час Δt. Величину

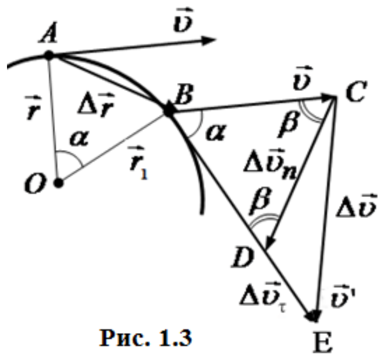

Рис. 1.3

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{1.12}$$

називають середнім прискоренням точки за час Δt.

Миттєве прискорення визначається границею, до якої прямує величина $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{dv_z}{dt} = \vec{i}\,\frac{d^2x}{dt} + \vec{j}\,\frac{d^2y}{dt} + \vec{k}\,\frac{d^2z}{dt}. \qquad (1.13)$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ прискорення можна виразити його проекціями на координатні осі:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z\,, \qquad (1.14)$$

то, порівнюючи (1.13) і (1.14), одержуємо співвідношення для складових прискорення:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\,,a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (1.15)$$

Модуль прискорення $\vec{a}$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}\,. \qquad (1.16)$$

Якщо матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням, то такий рух називають рівнозмінним. Якщо $a > 0$, то рух буде рівноприскореним, а якщо $a < 0$ то рівносповільненим.

Визначимо прискорення, коли траєкторія руху матеріальної точки є плоска крива лінія (див. рис. 1.3). Уздовж напряму вектора $\vec{v}^{'}$ відкладаємо вектор *BD*, який за модулем дорівнює вектору $\vec{v}$. Побудуємо вектор *CD* і позначимо його $\Delta\vec{v}_n$, а вектор *DE* позначимо $\Delta\vec{v}_\tau$.

Із рис. 1.3 слідує, що

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau\,, \qquad (1.17)$$

де $\Delta\vec{v}_n$ – вектор, який характеризує зміну швидкості за напрямом; $|\Delta\vec{v}_\tau|$ – модуль вектора, який характеризує зміну швидкості за величиною.

Тоді прискорення в точці *A*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t}. \qquad (1.18)$$

Позначимо прискореннями:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_n; \qquad (1.19)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} = \vec{a}_\tau. \qquad (1.20)$$

Вектор $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ називають прискореннями: відповідно нормальним і тангенціальним. Нормальне прискорення $\vec{a}_n$ характеризує зміну швидкості за напрямом за одиницю часу, а модуль тангенціального $|\vec{a}_\tau|$ – зміну швидкості за величиною за одиницю часу.

Співвідношення (1.18) тепер можна навести у вигляді:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \qquad (1.21)$$

тобто векторною сумою нормальної $\vec{a}_n$ та тангенціальної $\vec{a}_\tau$ складових.

Визначимо вектор нормального прискорення $\vec{a}_n$. За умови, що проміжок часу Δt, за який відбувається зміна швидкості, нескінченно малий, траєкторія являтиме собою відрізок кола із центрам у точці O та радіусом $OA \approx OB = r$. Кут $AOB = CBD = \alpha$ (як кути із взаємно перпендикулярними сторонами). Із подібності трикутників AOB і BCD маємо:

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{\Delta r}{r}; \Delta v_n = \frac{v}{r}\Delta r.$$

Отже, модуль нормального прискорення

$$|\vec{a}_n| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \qquad (1.22)$$

Кути при основі рівнобічного трикутника $ВСД$ позначимо β. Тоді $2\beta = 180^\circ - \alpha$, звідси $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Якщо $\Delta t \to 0$, то й $\alpha \to 0$, а $\beta \to 90^0$.

Отже, $\Delta \vec{v}_n$ буде перпендикулярним до вектора швидкості $\vec{v}$ і, таким чином, $\vec{a}_n$ також буде перпендикулярним до швидкості і напрямленим по радіусу $\vec{r}$ до центра кривизни O кривої.

Якщо одиничний вектор $\vec{n}$ напрямити вздовж радіуса до центра кривизни кривої (рис. 1.4), то вектор нормального прискорення можна записати у вигляді

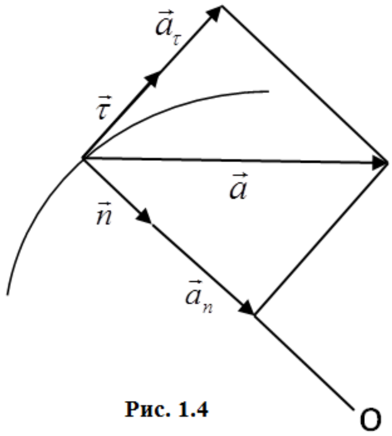

Рис. 1.4

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n}\,. \qquad (1.23)$$

Цей вираз для a_n можна використовувати не лише в разі розгляду руху по колу, а й по криволінійній траєкторії довільної форми, оскільки будь-яка траєкторія є сукупністю прилягаючих одна до одної дуг кіл різного радіуса, дотичних до криволінійної траєкторії в даній точці (рис. 1.5). Наприклад, рух на ділянці *1* можна уявити собі як такий, що проходить по дузі кола з радіусом *OA* і т.п. Таким чином, у разі руху по будь-якій траєкторії нормальне прискорення визначатиметься співвідношенням (1.23), але за радіус візьмемо змінний радіус кривизни ρ, який дорівнює для кожної точки траєкторії радіусу r кола, яке дотикається до траєкторії в даній точці

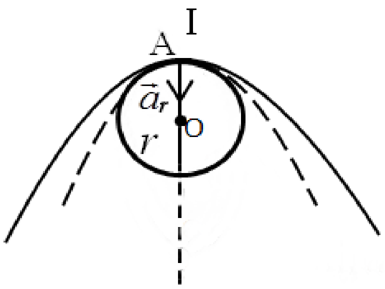

Рис. 1.5

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \qquad (1.24)$$

Звідси випливає, що чим менший радіус кривизни, тим більше нормальне прискорення. У разі прямолінійного руху, якщо $\rho \to \infty$, то $a_n \to 0$. Тепер повернемося до визначення вектора тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$ (1.20). Відзначимо, що модуль вектора $\Delta\vec{v}_\tau$

$$|\Delta\vec{v}_\tau| = |v' - v| = |v(t+\Delta t) - v(t)|.$$

Тоді модуль вектора прискорення $\vec{a}_\tau$

$$|\vec{a}_\tau| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta v_\tau|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|v(t+\Delta t) - v(t)|}{\Delta t} = \left|\frac{dv}{dt}\right|.$$

Таким чином модуль, тангенціального прискорення

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (1.25)$$

Оскільки Δv_τ при $\Delta t \to 0$ збігається з напрямом дотичної до траєкторії руху, то $\vec{a}_\tau$ також буде напрямлене по дотичнійдо траєкторії руху в даній точці. Звідси виникла назва $\vec{a}_\tau$ – тангенціальне, тобто дотичне до траєкторії. Введемо одиничний вектор $\vec{\tau}$ (рис. 1.4), який дотичний до траєкторії в даній точці. Тоді

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}\ . \qquad (1.26)$$

У разі рівномірного руху по колу ($\vec{a}_\tau = 0$) існує лише нормальне прискорення. Повертаючись до (1.21), вектор повного прискорення запишемо у вигляді:

$$\vec{a}\ = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \left(\frac{v^2}{r}\right)\vec{n} + \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{\tau}\ , \qquad (1.27)$$

а його модуль

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\ .$$

1.3. Рух матеріальної точки по колу

Розглянемо один з окремих випадків криволінійного руху – рух матеріальної точки по колу. Виберемо систему координат, початок якої збігається з центром кола. Візьмемо за координатну вісь *x* будь-який напрям радіуса, наприклад горизонтальний (рис. 1.6).

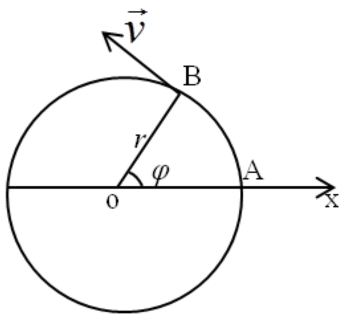

Рис. 1.6

Тоді миттєве положення точки, яка рухається по колу, визначається кутом обернення $\varphi = \varphi(t)$ її радіус - вектора $\vec{r}$.

Припустимо, що за час Δt радіус-вектор $\vec{r}$ повернувся на кут $\Delta\varphi$ (рис.1.7). Кутове переміщення $\Delta\varphi$, характеризується як числовим значенням, так і напрямом повороту.

Покажемо, що елементарне (невелике) кутове переміщення $\Delta\varphi$ (або $d\varphi$) має властивості вектора.

Домовимось $\Delta\varphi$ зображати у вигляді відрізка довжиною $\Delta\varphi$, який напрямлено перпендикулярно до площини кола. Напрям $\Delta\varphi$ визначається за правилом правої руки: якщо чотири пальці розташувати в напрямі руху точки, то великий палець, випрямлений під кутом 90°, вказуватиме напрям вектора $\Delta\varphi$ (рис. I.7). Розглянемо невеликі кутові переміщенн $\Delta\varphi_1$ і $\Delta\varphi_2$. Якщо ці

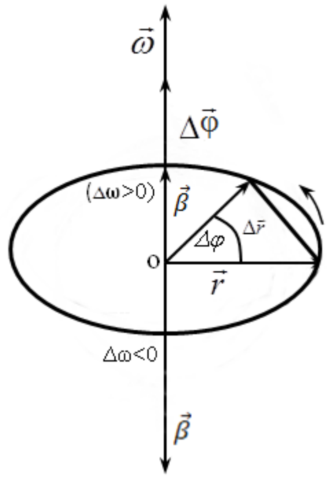

Рис. 1.7

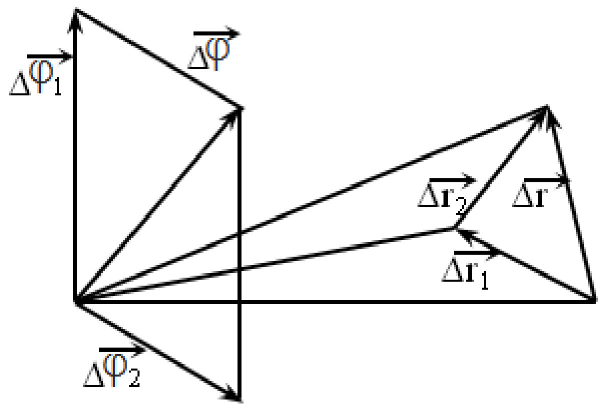

Рис. 1.8

величини є векторами, то вони мають додаватися за правилом додавання векторів. Нехай кутовому переміщенню $\Delta\vec{\varphi}_1$ відповідав вектор переміщення матеріальної точки $\Delta\vec{r}_1$, а вектору переміщення $\Delta\vec{r}_2$- кутове переміщення $\Delta\varphi_2$ Результуючому вектору переміщення $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$ відповідає вектор деякого кутового переміщення $\Delta\varphi$, який можна одержати в результаті додавання за правилом паралелограма векторів $\Delta\vec{\varphi}_1$ і $\Delta\vec{\varphi}_2$ (рис. 1.8):

$$\Delta\vec{\varphi} = \Delta\vec{\varphi}_1 + \Delta\vec{\varphi}_2,$$

тобто два послідовних повороти $\Delta\varphi_1$ і $\Delta\varphi_2$ еквівалентні одному повороту на кут $\Delta\varphi$.

Отже, елементарні кутові переміщення $\Delta\vec{\varphi}$ можна розглядати як вектори.

Вектори, подібні до $\Delta\vec{\varphi}$, напрями яких пов'язані з напрямом обертання і змінюються на протилежні в разі переходу від правої системи координат до лівої, називаються псевдо-, або аксіальними, векторами.

Відзначимо, що векторні властивості притаманні лише елементарним кутовим переміщенням $\Delta\vec{\varphi}$. Переміщення на кут $\varphi \gg \Delta\varphi$ не будуть векторами. Якщо такі кутові переміщення φ зобразити у вигляді відрізків прямих, перпендикулярних до площини, в якій відбувається переміщення, то ці відрізки не будуть складатися за правилом паралелограма.

Якщо елементарне кутове переміщення $\Delta\vec{\varphi}$ відбувається за проміжок часу Δt**,** то <u>середня кутова швидкість</u>

$$\vec{\omega}_{сер} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \tag{1.29}$$

<u>Миттєва кутова швидкість</u>

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.30}$$

Одиниця кутової швидкості в СІ – радіан за секунду (рад/с). Кутова швидкість $\vec{\omega}$, як і елементарне кутове переміщення $d\vec{\varphi}$, є псевдовектором, який збігається за напрямом з $d\vec{\varphi}$ (рис. 1.7).

У разі рівномірного обертального руху модуль кутової швидкості ω є величиною сталою: $\omega = const$. Знаючи ω, визначаємо закон руху матеріальної точки:

$$\varphi = \int \omega dt = \omega t + C,$$

де C – стала інтегрування, яка визначається з початкових умов (якщо при $t = 0$ кут $\varphi = \varphi_0$, то $C = \varphi_0$).

Таким чином, закон рівномірного руху матеріальної точки по колу набуває вигляду $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

Часто в разі рівномірного обертання по колу ω називають колової частотою, її можна виразити через кількість обертів n, які здійснює матеріальна точка, що рухається по колу. Оскільки одному повному оберту відповідав кут 2π радіан, то в разі n обертів

$$\omega = 2\pi n\,. \tag{1.31}$$

У загальному випадку кутова швидкість $\vec{\omega}$ може змінюватись з часом: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Якщо зміна $\vec{\omega}$ за проміжок часу Δt дорівнюватиме $\Delta\vec{\omega}$, то <u>миттєве кутове прискорення</u>

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \tag{1.32}$$

Одиниця кутового прискорення в СІ – рад/с^2. Вектор $\vec{\beta}$, як і $\vec{\omega}$, є псевдовектором.

Якщо матеріальна точка рухається весь час в одній площині, не змінюючи напрям руху, то вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ з часом змінюється лише за величиною. Тоді вектор кутового прискорення $\vec{\beta}$ буде напрямлений уздовж вектора $\vec{\omega}$. Причому, якщо рух прискорений ($\Delta\omega > 0$), то $\vec{\beta}$ збігається з $\vec{\omega}$. У разі сповільненого руху ($\Delta\omega < 0$) вектор $\vec{\beta}$ буде напрямлений у протилежний бік (рис. 1.7).

Інтегруючи двічі $\vec{\beta} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ дістаємо рівняння рівнозмінного руху

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}\,,$$

де в момент часу $t = 0$ кут повороту $\varphi = \varphi_0$, а кутова швидкість $\omega = \omega_0$.

Розглянемо зв'язок між лінійними характеристиками руху точки, тобто швидкістю $\vec{v}$, прискореннямм a_n, a_τ і кутовими характеристиками. З геометрії відомо, що кут повороту φ і довжина дуги S пов'язані між собою співвідношенням $S(t) = r\,\varphi(t)$.

Швидкість руху матеріальної точки по колу (лінійна швидкість)

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(r\varphi) = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \tag{1.33}$$

Беручи до уваги, що $\vec{v}$, $\vec{r}$ і $\vec{\omega}$ є векторами (рис.1.9), співвідношення (1.33) можна записати у векторній формі:

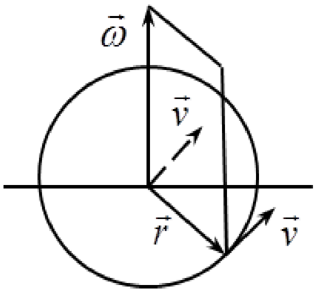

Рис. 1.9

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \tag{1.34}$$

Справді, векторний добуток $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ збігається з напрямом вектора $\vec{v}$ і має модуль, який дорівнює $v = \omega r \sin\alpha = \omega r$. Знайдемо зв'язок між лінійним і кутовим прискореннями:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}].$$

Це співвідношення є виразом рівняння $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$,

де

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}], \tag{1.35}$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}], \tag{1.36}$$

Приклади розв'язання задач

<u>*Задача № 1.1*</u> *Із точки, розміщеній на висоті* y_0 :*над поверхнею землі, кидають одне за одним через інтервал часу* τ *два тіла з однаковою швидкістю* v_0 : *тіло 1 – вертикально вгору, тіло 2 – вертикально вниз. Визначити, через який час* t *від початку руху першого тіла обидва тіла ,будуть знаходитися на відстані* Δr *один від одного.*

Розв'язок:

Вважатимемо точку кидання початком координат і направимо вісь вертикально вниз. Відстань між обома тілами у момент t *дорівнюватиме* *різниці переміщень* $\Delta r = r_2 - r_1$ *або, в проекціях на вертикаль* $\Delta y = y_2 - y_1$.

Тіло 1 спочатку рухається рівносповільнено вгору впродовж часу t_1, *а потім впродовж такого ж часу – рівноприскорено вниз до вихідної точки кидання, де знову набуває швидкості* v_0. *Його переміщення дорівнює*

$$y_1 = v_0(t - 2t_1) + \frac{g}{2}(t - 2t_1)^2 .$$

Переміщення тіла 2 дорівнює

$$y_2 = v_0(t - \tau) + \frac{g}{2}(t - \tau)^2 .$$

Враховуючи, що $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$, *визначаємо*

$$\Delta y = (2v_0 - g\tau) - v_0\tau + \frac{g\tau^2}{2}$$

Звідси з урахуванням, що $\Delta y = \Delta r$, *отримаємо*

$$t = \frac{\Delta r + (v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2})}{2v_0 - g\tau}$$

при умові, що $v_0 > \dfrac{g\tau}{2}$.

<u>Задача № 1.2</u> Із точки з координатами x_0, y_0 *кинуто тіло під кутом* α_0 *до горизонту із початковою швидкістю* v_0 *(рис.1).*

Визначити:

- *положення і швидкість тіла через час* t;
- *рівняння траєкторії польоту тіла*
- *нормальне і тангенціальне прискорення тіла і радіус кривизни траєкторії в момент* t;
- *повний час польоту;*
- *найбільшу висоту підйому;*
- *кут, під яким потрібно кинути тіло, щоб висота його підйому була рівна дальності польоту (за умови, що* $x_0 = y_0 = 0$*).*

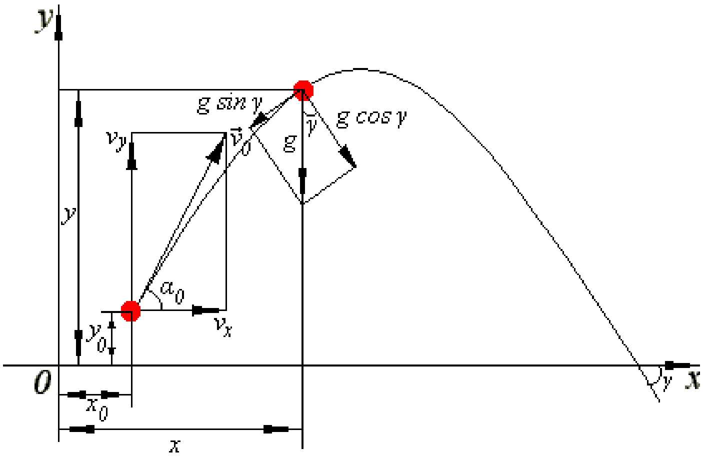

рис.1

Розв'язок:

Направимо осі прямокутної системи координат X та Y по напрямах горизонтального і вертикального переміщення точки. Запишемо векторні рівняння руху тіл:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2;$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Спроектуємо перше рівняння на осі координат, отримаємо два рівняння прекцій, які визначають положення тіла в момент часу t:

$$x - x_0 = v_0 t \cos\alpha_0;$$

$$y - y_0 = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Оскільки кожен вектор можна представити у вигляді суми його проекцій (це теж вектори) на осі координат кожне векторне рівняння може бути представлено у вигляді двох векторних рівнянь але вже для проекцій. Виразив проекції векторних величин що входять в друге рівняння на осі системи координат, визначаємо складові швидкості

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0; \qquad v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt$$

результуюча швидкість (використана теорема Піфагора)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha_0 + g^2 t^2}$$

Тангенс кута між напрямом результуючої швидкості і віссю X рівний

$$tg\gamma = \frac{v_y}{v_x} = tg\alpha_0 - \frac{gt}{v_0 \cos\alpha_0},$$

тобто він змінюється з часом. Це зрозуміло, оскільки величина швидкості має геометричну інтерпретацію у вигляді величини тангенса кута нахилу дотичної до залежності координати або радіус-вектора від часу. Виключивши t *з обох рівнянь що визначають положення тіла в момент часу* t, *отримаємо рівняння траєкторії польоту*

$$y = y_0 + (x - x_0)tg\alpha_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}.$$

Щоб визначити тангенціальне і нормальне прискорення тіла у точці з координатами x, y помітимо, що повне прискорення тіла увесь час спрямоване вниз і представляє собою тільки прискорення сили тяжіння $\vec{g}$.

Тангенціальне прискорення дорівнює проекції вектора $\vec{g}$ *на дотичну до траєкторії (тобто –* $g\sin\gamma$, *як ми бачимо із рис.1), а нормальне прискорення дорівнює проекції –* $g\cos\gamma$ *на нормаль.*

Оскільки

$$\sin\gamma = \frac{tg\gamma}{\sqrt{1 + tg^2\gamma}}; \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\gamma}},$$

то

$$a_n = -\frac{gv_x}{v}; \qquad a_\tau = -\frac{gv_y}{v}.$$

Визначимо наближене значення радіусу кривизни (R) траєкторії в момент часу t. *Точка рухається по дузі кола, її прискорення*

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

звідки

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{gv_x}.$$

Максимальну дальність польоту $x_{\max}$ *знайдемо із умови* $y = 0$. *Вважаючи в рівнянні траєкторії* $y = 0$, *отримаємо квадратне рівняння з якого можна визначити* $x_{\max}$ *:*

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}(x_{\max} - x_0)^2 - tg\alpha_0(x_{\max} - x_0) - y_0 = 0.$$

Якщо тіло кинуте з точки на поверхні, де і $y = 0$, *задача істотно спрощується. Скорочуючи на* $(x_{\max} - x_0)$, *знаходимо, що*

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} + x_0.$$

Повний час польоту можна визначити з формули

$$y - y_0 = v_0 \sin\alpha_0 t - \frac{gt^2}{2} \text{ при } y = 0,$$

звідки

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gy_0}}{g}.$$

Найбільша висота підйому тіла досягається в момент часу t *тоді, коли* $v_y = 0$. *Оскільки складова вектора швидкості уздовж осі Y дорівнює* $v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt$, *то при* $v_y = 0$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}.$$

Тепер використаємо рівняння для складової руху тіла паралельно осі Y, задавши $y = y_{\max}$

$$y_{\max} - y_0 = v_0 \sin\alpha_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Виключивши час t *з обох рівнянь, отримаємо*

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} + y_0.$$

Очевидно, що найбільша висота підйому буде при $\alpha_0 = 90^\circ$*, тобто коли тіло кинуто вертикально вгору.*

Прирівнюючи x_{max} *і* y_{max} *один до одного (за умови, що* $x_0 = 0; y_0 = 0$ *отримуємо умову рівності максимальної висоти підйому і дальності польоту тіла*

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g},$$

звідки $tg\alpha_0 = 4; \alpha_0 \approx 76^\circ$.

Знайдемо швидкість тіла в момент приземлення $v_{рез}$ *(за умови, що* $x_0 = 0; y_0 = 0$*). Для цього підставимо значення* $t = t_{max} = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$*, у вираз для швидкостей* v_x, v_y *і* v*, а також у формулу для тангенса кута між* v *і віссю X. При цьому отримаємо*

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0;\ v_y = -v_0 \sin\alpha_0;\ v_{рез} = v_0;\ tg\gamma = -tg\alpha_0.$$

Ми бачимо, що вертикальна складова вектору швидкості тіла під час польоту змінюється від $v_0 \sin\alpha_0$ *до нуля і потім до* $-v_0 \sin\alpha_0$*. Горизонтальна складова залишається постійною і рівною* $v_0 \cos\alpha_0$*. Таким чином, модуль швидкості* v *у польоті увесь час змінюється. Змінюється також і напрям швидкості, оскільки тангенс кута між* v *і віссю X зменшується від* $tg\alpha_0$ *до нуля (у точці максимального підйому) і потім до* $-tg\alpha_0$ *(у точці приземлення).*

<u>Задача № 1.3</u> Куля що падає з вершини башти, вже пролетіла l *м, коли друга куля почала падати з точки, розташованої на* h *м нижче вершини. Визначити висоту башти, коли обидві кулі досягають поверхню землі одночасно.*

Розв'язок:

Нехай перша куля пролетіла l м за

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}},$$

а друга куля падала t_2 *сек. Тоді час падіння першої*

$$t_1 = t_2 + \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Шлях, пройдений тілами, становить

$$H - h = \frac{1}{2}gt_2^2 \quad і \; H = \frac{1}{2}g(t_2 + \sqrt{\frac{2l}{g}})^2.$$

Визначимо з першого рівняння $t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$ *і підставимо в друге:*

$$H = \frac{1}{2}g(\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2l}{g}})^2 = (\sqrt{H-h} + \sqrt{l})^2$$

або

$$h - l = 2\sqrt{l(H-h)}.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату і отримаємо

$$H\frac{(l+h)^2}{4l}.$$

<u>Задача № 1.4</u> Диск радіус котрого дорівнює $r = 20 см$ *обертається згідно рівнянню* $\varphi = A + Bt + Ct^3$*, де* $A = 3 рад, C = -1 рад/с, C = 0{,}1 рад/с^3$ *. Визначити тангенціальне* a_τ*, нормальне* a_n *і повне* a *прискорення точок на окружності диску для моменту часу* $t = 10 с$.

Розв'язок:

Повне прискорення a *визначимо по формулі*

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \tag{1}$$

Нормальне a_n *прискорення*

$$a_n = \omega^2 R. \tag{2}$$

тангенціальне a_τ прискорення

$$a_\tau = \varepsilon R. \qquad (3)$$

Кутову швидкість визначимо взявши першу похідну від кутового переміщення по часу

$$\omega = \varphi' = B + 3Ct^2. \qquad (4)$$

Кутове прискорення визначимо взявши першу похідну від кутової швидкості по часу

$$\varepsilon = \omega' = 6Ct \qquad (5)$$

Підставимо формулу (4) в (2), а (5) в (3) отримаємо

$$a_n = (B + 3Ct^2)R = 1{,}2\, м/с^2;$$

$$a_\tau = 6CtR = 168{,}2\, м/с^2.$$

Підставивши a_n і a_τ в рівняння (1) отримаємо

$$a = \sqrt{((B + 3Ct^2)R)^2 + (6CtR)^2} \approx 168\, м/с^2.$$

Запитання

1. Що таке матеріальна точка?
2. Які існують основні види руху твердих тіл?
3. Скалярний добуток векторів, складання векторів.
4. Дати визначення поняттям переміщення та шлях.
5. Прискорення. Тангенціальне,нормальне.
6. Що таке миттєва швидкість, поступального та обертальногорухів? Зв’язок між ними.
7. Що таке поступальний рух тіла?
8. Зв'язок між лінійною і кутовою швидкістю. Зв'язок між лінійним і кутовим прискоренням.
9. Визначте швидкість, за якої рухається тінь Місяця по земній поверхні, коли відбувається повне сонячне затемнення.

Список літератури:

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. Навчальний посібник для студентів вищих тех. і пед. закладів освіти. Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик; За ред. І.М. Кучерука –К.:Техніка, 1999. –536с.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика / Д.В. Сивухин –М.: Наука, 1974. –519с.

3. Иродов И.Е. Механика. Основые законы / И.Е. Иродов – 6-е изд., испр. –М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. –309с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. / И.В. Савельев –М.: Наука, 1970. –508с.

Рекомендований до перегляду відеоматеріал:

5. https://www.youtube.com/watch?v=bATVcsQ2pts

6. https://www.youtube.com/watch?v=oioNUtGM0vg

Розділ 2. ОСНОВИ ДИНАМІКИ

2.1. Перший закон Ньютона

Динаміка на відміну від кінематики розглядає рух тіл у взаємозв'язку з тими фізичними причинами, які спричинили цей рух.

В основі динаміки лежать три закони, сформульовані Ньютоном у 1687 р. у результаті узагальнення спостережень багатьох учених. Перший закон динаміки – закон інерції – встановив Галілео Галілей у 1638 р. Він формулюється так: тіло (або матеріальна точка) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки відсутні дії з боку інших тіл. Такий рух за відсутності впливу зовнішнього середовища називають рухом за інерцією. Тому перший закон Ньютона ще називають законом інерції.

У природі не існує тіл, вільних від впливу зовнішнього оточення, але цей вплив можна звести до мінімуму або компенсувати.

Як відомо, розглядати будь-який рух доцільно лише тоді, коли зазначено систему відліку, відносно якої цей рух відбувається. Ту систему відліку, в якій виконується перший закон Ньютона, називають інерціальною. Будь-яка система відліку, яка рухається зі сталою швидкістю відносно інерціальної системи відліку, також буде інерціальною. Існує безліч рівноправних інерціадьних систем.

Система відліку, яка рухається з прискоренням є неінерціальною. Оскільки не існує тіл, вільних від впливу зовнішнього оточення, то будь-яка система лише наближено може розглядатись як інерціальна. Наприклад, система відліку, пов'язана із Землею унаслідок її обертання навколо власної осі та навколо Сонця, є неінерціальною. Оскільки Земля обертається дуже повільно, наприклад, максимальне прискорення точок її поверхні в разі добового обертання становить 0,034 м/с^2, то в процесі розв’язання більшості практичних задач систему відліку, пов'язану із Землею, можна наближено вважати інерціальною.

Найбільш вдалим наближенням до інерціальної системи є геліоцентрична система відліку, в якій початок координат розміщується в центрі Сонця, а координатні осі напрямлені до трьох віддалених зірок. Якщо ці зірки належать до нашої Галактики, то така система може відігравати роль інерціальної в розгляді руху об'єктів, малих порівняно з розмірами Галактики, наприклад Сонячної системи або окремих її частин.

Отже, перший закон Ньютона є одним із фундаментальних законів природи. Він справедливий як у космічних масштабах, так і в мікросвіті.

Далі розглянемо рух відносно інерціадьних систем відліку.

2.2. Другий закон Ньютона. Сила і маса

Із першого закону Ньютона випливає, що тіло змінює свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, тобто прискорюється, лише тоді, коли на нього діє інше тіло.

Кількісною мірою дії одного тіла на інше є сила $\vec{F}$.

Дія сили $\vec{F}$ може привести не лише до появи прискорення. *У* деяких випадках єдиним результатом дії сили $\vec{F}$ може бути деформація тіл, які взаємодіють. Згідно із цим існує два способи вимірювання сили: за деформацією тіла, взятого за еталон (наприклад, пружини), та через набуте тілом прискорення.

Із досліду виходить, що сила, $\vec{F}$ є векторною величиною. Якщо на тіло одночасно діють кілька сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ... \vec{F}_n$, то сумарна їх дія така сама, як і деякої сили $\vec{F}$, яка дорівнює їх векторній сумі:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Силу $\vec{F}$ називають рівнодійною всіх прикладених до тіла сил.

Щоб установити зв'язок між силою, яка діє на тіло, і прискоренням, якого воно набуває, було використано експериментальну установку, зображену на рис. 2.1.

Візок, розміщений на горизонтальній площині, рухається під дією сили натягу нитки $\vec{F}$, яку вимірюють динамометром. Вимірюючи силу та відстань, яку проходить візок за якийсь певний час під дією цієї сили, знаходять зв'язок між силою та прискоренням.

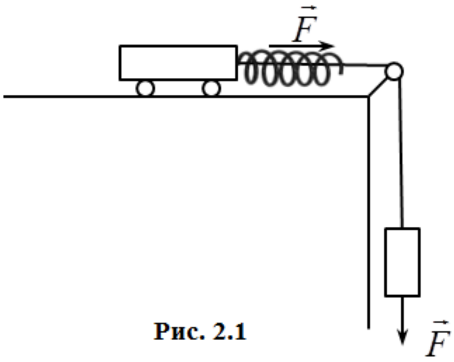

Рис. 2.1

Як показали досліди, різні сили надають тілу різні прискорення. У той самий час відношення сили до прискорення завжди дорівнює одній і тій самій сталій величині, тобто якщо сила F_1 надає даному тілу прискорення a_1, а сила F_2 – прискорення a_2 і т.п.,

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = ... = \frac{F_n}{a_n} = const = m. \qquad (2.1)$$

Звідси випливає, що прискорення, з яким рухається тіло, пропорційне до значення діючої на нього сили: $\vec{a} \sim \vec{F}$, Вектори $\vec{a}$ і $\vec{F}$ виявились колінеарними. Фізичний зміст постійної m стає зрозумілим, якщо в дослідах із візком змінюватимемо його навантаження. У разі збільшення навантаження m змінюється. Прискорення, зумовлені дією однієї й тієї самої сили, зменшуватимуться, а величина m збільшуватиметься. Отже, прискорення, з яким рухається тіло під дією сили, залежить не лише від сили, а й від деяких фізичних властивостей тіла, яке прискорюється. Ця властивість змінюється із зміною кількості речовини, що містить у собі тіло, і називається інертністю. Чим більша інертність тіла, тим менше воно отримає прискорення під дією постійної сили. Мірою інертності тіла й є величина *m,* яка називається масою тіла.

Враховуючи, що величини $\vec{a}$ і $\vec{F}$ – вектори, співвідношення (2.1) запишемо у вигляді

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.2}$$

З'ясуємо, що буде в результаті одночасної дії на тіло масою *m,* кількох незалежних одна від одної сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Згідноз принципом незалежної дії сил прискорення тіла в цьому разі дорівнюватиме векторній сумі прискорень, які одержало б це тіло у разі дії на нього окремо кожної сили, тобто

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n, \text{ де } \vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m},\ \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m},\ ...,\ \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m},$$

Тоді

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{2.3}$$

де $\sum \vec{F}_i = \vec{F}$ – рівнодіюча сил, прикладених до тіла.

Таким чином, другий закон Ньютона формулюється так: прискорення, якого набуває тіло (або матеріальна точка), прямо пропорційне рівнодіючій всіх сил, прикладених до тіла, і обернено пропорційне масі цього тіла. Співвідношення (2.3) є математичним виразом другого закону Ньютона.

Перепишемо (2.3) у вигляді:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2.3^1)$$

або, ураховуючи, що $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (2.4)$$

Рівняння (2.3^1) і (2.4) можна записати у проекціях на координатні осі:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x = m\frac{dv_x}{dt}; \\ F_y &= ma_y = m\frac{dv_y}{dt}; \\ F_z &= ma_z = m\frac{dv_z}{dt}, \end{aligned} \qquad (2.5)$$

де F_x, F_y, F_z – проекції вектора $\vec{F}$ на координатні осі *x*, *y*, *z*.

Із другого закону Ньютона визначається одиниця сили. За одиницю сили беруть таку силу, яка здатна матеріальній точці масою 1 кг надати прискорення 1 м/с^2.

Ця одиниця називається ньютоном: 1 Н = 1 кг • 1 м/с^2.

2.3. Третій закон Ньютона

Другий закон Ньютона не зазначає походження сили, яка впливає на рух тіла, а також нічого не говорить про інші тіла, з боку яких ця сила діє.

Між тим результати дослідів показують, що дії тіл завжди носять взаємний характер.

Розглянемо, наприклад, удар молотка об цвях. Не лише молоток діє на цвях, а й цвях, у свою чергу, діє на молоток, у результаті чого швидкість молотка різко зменшується до нуля. Таке гальмування можуть спричинити лише потужні сили.

Третій закон Ньютона якраз і виражає той факт, що сила є результатом взаємної дії тіл. Цей закон формулюється так: сили, з якими дві матеріальні точки діють одна на другу – рівні по модулю і протилежно напрямлені вздовж прямої, яка з'єднує ці точки, тобто

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \tag{2.6}$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, яка діє на першу матеріальну точку з боку другої; а $\vec{F}_{21}$ – сила, з якою діє перша матеріальна точка на другу (рис. 2.2).

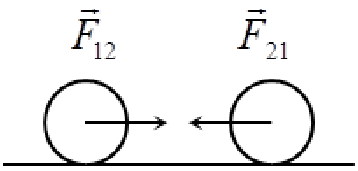

Рис. 2.2

Зауважимо, що в даному законі йдеться про сили, прикладені до різних тіл, тому їх не можна розглядати як сили, які зрівноважують одна одну. Щоб уявити, як взаємодіють два макроскопічні тілах умовно поділяють на елементарні частини (матеріальні точки) з массами dm_1, dm_2, dm_3 *і* додають сили взаємодії по всьому об'єму.

Третій закон Ньютона виконується досить строго в разі взаємодії тіл, які перебувають у безпосередньому контакті, а також у разі взаємодії тіл, які перебувають на деякій відстані одне від одного, якщо ці тіла перебувають у стані спокою, або рухаються зі швидкістю, значно меншою ва швидкість світла.

Закони Ньютона є основними законами класичної механіки і мають широку сферу застосування. Рух небесних тіл, космічних апаратів, різних механізмів сучасної техніки, заряджених часток у слабких електричних і магнітних полях, молекул газу в разі невеликих тисків і не дуже низьких температур.

У той самий час закони Ньютона не виконуються в області мікросвіту, а також у разі швидкостей, які наближаються до швидкості світла ($v \to c$). Тут вступають в силу закони квантової механіки та механіки спеціальної теорії відносності.

2.4. Другий закон Ньютона в загальній формі. Імпульс

Ньютон сформулював другий закон динаміки у більш загальній формі, ніж це зроблено у (2.3) або (2.4). Якщо масса m є стала, введемо її під знак диференціалу у рівнянні (2.4):

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right). \tag{2.7}$$

Фізична величина $m\vec{v}$, що вимірюється добутком маси матеріальної точки (або тіла) на швидкість руху, називають імпульсом матеріальної точки (або тіла) і позначають :

$$\vec{p} = m\vec{v}\ . \tag{2.8}$$

Це одна із важливих фізичних величин. Імпульс – векторна величина та її напрям збігаються з напрямом швидкості. Оскільки швидкість $\vec{v}$ залежить від вибору системи відліку, то, розглядаючи імпульс, потрібно визначити систему відліку.

Одиниця імпульсу в СІ – кг·(м/с).

Використавши поняття імпульсу, другий закон Ньютона запишеться так:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2.9}$$

тобто <u>похідна від імпульсу матеріальної точки за часом дорівнює рівнодіючій усіх сил, прикладених до неї.</u>

Рівняння (2.9) можна записати у вигляді

$$\vec{F}dt = d\vec{p} \tag{2.10}$$

Векторну величину $\vec{F}dt$ називають <u>імпульсом сили</u>. Із формули (2.10) випливає, що зміна імпульсу матеріальної точки (тіла) залежить не лише від діючої сили, а й від часу, протягом якого вона діє.

Запропоноване Ньютоном формулювання основного закону динаміки (2.9) найбільш універсальне. Якщо маса тіла стала, то записи другого закону

Ньютона (2.9) і (2.4) еквівалентні.

Другий закон Ньютона в загальному формулюванні (2.9) справджується, якщо швидкість руху наближається до швидкості світла *c: v→c* (релятивістська механіка), коли за імпульс візьмемо величину

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2.11)$$

Вираз (2.11) набуває вигляду $\vec{p} = m\vec{v}$, коли $v << c$; $\frac{v^2}{c^2} << 1$. Постійна величина *m* у (2.11) дістала назву “маса спокою”.

2.5. Закон збереження імпульсу

Із виразу другого закону Ньютона в загальному вигляді (2.9) випливає, що коли на матеріальну точку сила не діє, або рівнодійна всіх сил дорівнює нулю, $F = 0$, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, тобто в цьому разі імпульс матеріальної точки залишається незмінним:. $\vec{p} = const$

Запишемо другий закон Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ у проекціях на координатні осі:

$$\vec{F}_x = \frac{d\vec{p}_x}{dt};$$

$$\vec{F}_y = \frac{d\vec{p}_y}{dt};$$

$$\vec{F}_z = \frac{d\vec{p}_z}{dt}.$$

Якщо сила, яка діє, дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), тобто $F_x = F_y = F_z = 0$, то

$$\frac{dp_x}{dt} = 0; \frac{dp_y}{dt} = 0; \frac{dp_z}{dt} = 0.$$

Звідси одержуємо, що $p_x = const, p_y = const, p_z = const$, тобто всі складові імпульсу $\vec{p}$ на координатні осі зберігають свої значення і $\vec{p} = const$.

Але може статися, що сила $\vec{F}$ матиме лише одну складову, що не дорівнює нулю, наприклад коли $\vec{F}$ напрямлена вздовж осі *x*, тоді $F_x = F, F_y = F_z = 0$. У цьому разі

$$\frac{dp_x}{dt} = F; \frac{dp_y}{dt} = 0; \frac{dp_z}{dt} = 0.$$

Це означає, що змінюється лише складова імпульсу вздовж осі, по якій діє сила, а складові імпульсу вздовж інших осей зберігаються. Наприклад, імпульс тіла, яке вільно падає, не може зберігатись, оскільки на тіло діє сила тяжіння. Під дією цієї сили вертикальна складова імпульсу неперервно змінюється. У той самий час горизонтальна складова імпульсу в разі вільного падіння залишається не змінною.

Тепер розглянемо систему матеріальних точок. Припустимо, що на кожну матеріальну точку діють як внутрішні, так і зовнішні сили.

Внутрішніми називають сили взаємодії між матеріальними точками самої системи, а зовнішніми - сили взаємодії між точками системи та тілами, які не входять до неї.

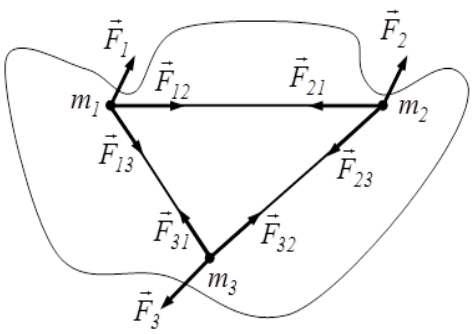

Рис. 2.3

Припустимо також, що система складається з трьох матеріальних точок масами m_1, m_2 і m_3 (рис. 2.3). Зовнішні сили позначимо F_i, а внутрішні f_{ik}. Під дією цих сил імпульс кожної матеріальної точки змінюється. Розглянемо рух цієї системи відносно деякої інерціальної системи відліку.

Згідно з другим законом Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1;$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{22} + \vec{F}_2; \qquad (2.14)$$
$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3,$$

де $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ – імпульс точки масою відповідно m_1, m_2, і m_3.

Додавши ці рівняння та врахувавши, що сума похідних від імпульсу дорівнює похідній від їх суми, одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right) = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \quad (2.15)$$

Згідно з третім законом Ньютона $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}, \vec{f}_{13} = -\vec{f}_{31}$ і $\vec{f}_{32} = -\vec{f}_{23}$. Тому в формулі (2.I5) сума всіх внутрішніх сил дорівнює нулю. Таким чином, із (2.15) одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3. \qquad (2.16)$$

Якщо система складається з *n* матеріальних точок, то, узагальнюючи (2.16), дістаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (2.16^1)$$

Векторну суму імпульсів усіх матеріальних точок системи називають <u>імпульсом системи</u>:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i. \qquad (2.17)$$

Тоді (2.16^1) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (2.18)$$

Отже, імпульс системи матеріальних точок змінюється лише під дією зовнішніх сил. Під дією внутрішніх сил змінюються імпульси окремих матеріальних точок системи, але на імпульс системи ці сили не впливають. Наприклад, молекули газу зазнають дії з боку стінок посудини, в якій вони перебувають. Ці сили зовнішні. Оскільки стінки діють з усіх боків однаково,то середнє значення імпульсу всіх молекул, тобто імпульс системи, залишається незмінним.

Рівняння (2.I8) можна записати через проекції на координатні осі:

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix};$$
$$\frac{dp_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \qquad (2.19)$$
$$\frac{dp_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

Припустимо, що векторна сума всіх зовнішніх сил $\sum \vec{F}_s$ дорівнює нулю: $\sum \vec{F}_i = 0$. Це означає, що або зовнішні сили на систему не діють, або їх дія компенсується. Таку систему називають замкненої, або ізольованою. Тоді рівняння (2.18) набуває вигляду

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \qquad (2.20)$$

звідки

$$\vec{P} = const. \qquad (2.21)$$

Таким чином, імпульс замкненої системи є величиною сталою. Це положення називають законом збереження імпульсу. Система може бути незамкненою, але для деяких напрямів закон збереження імпульсу може справджуватись. Якщо, наприклад, $\sum F_{ix} \neq 0$, але $\sum F_{iy} = \sum F_{iz} = 0$, то як випливає з (2.19), $P_y = const, P_z = const$, а $P_x \neq const$, тобто зберігаються складові імпульсу за тими напрямами, вздовж яких векторна сума зовнішніх сил дорівнюватиме нулю.

Закон збереження імпульсу універсальний і виконується у разі всіх відомих взаємодій. Імпульс можуть мати не лише матеріальні тіла, а й поля. Так, наприклад, тиск світла є ні чим іншим, як виявом імпульсу електромагнітного поля.

2.6. Центр мас системи матеріальних точок і його властивості

У підрозділі 2.5 розглянуто рух системи матеріальних точок відносно довільно вибраної інерціальної системи відліку. Для різних систем відліку константа в рівнянні (2.21) ($\vec{P} = const$) буде різною. Зокрема, можна вибрати таку систему відліку, в якій ця стала дорівнюватиме нулю.

Початок координат такої системи збігається з положенням деякої специфічної точки цієї системи, яку називають центром мас.

Розглянемо імпульс системи, яка складається з *n* матеріальних точок:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i .$$

Якщо $\vec{r}_i$ – радіус-вектор, який визначає положення будь-якої матеріальної точки системи, то швидкість *i-ї* матеріальної точки $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$.

Тоді імпульс системи

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i . \qquad (2.22)$$

Маса всієї системи $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Беручи до уваги, що $M = const$, праву частину виразу (2.22) перемножимо і розділимо на M.

$$\vec{p} = M\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}\right) \qquad (2.23)$$

Вираз під знаком диференціалу є вектором, який вимірюється в одиницях довжини. Позначимо його $\vec{R}$. Тоді

$$\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M} = \frac{m_i\vec{r}_i + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{M} = \vec{R}. \qquad (2.24)$$

Цей вектор визначає положення деякої уявної точки, яка називається центром мас системи матеріальних точок.

Із (2.24) можна одержати формули для обчислення координат X, *У*, Z центра мас:

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M}; Y = \frac{\sum m_i y_i}{M}; Z = \frac{\sum m_i z_i}{M}. \qquad (2.25)$$

Розглянемо для прикладу окремий випадок системи, яка складається з двох точок масою відповідно m_1 і m_2 (рис. 2.4). Центром мас системи двох матеріальних точок А і В називається точка *С* на відвідрізку *АВ*, яка перебуває на відстанях l_1 і l_2 від *А* і *В*. Беручи до уваги, що

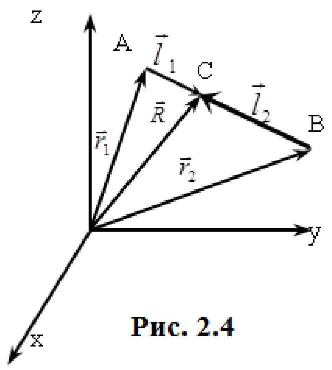

Рис. 2.4

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (2.26)$$

і знаючи положення точок *А і В* (тобто радіуси-вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$) можна визначити радіус-вектор центра мас С.

Із рис. 2.4 випливає, що

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r}_1 + \vec{l}_1; \\ \vec{R} &= \vec{r}_2 + \vec{l}_2, \end{aligned} \qquad (2.27)$$

де $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ – вектор, проведений від точки відповідно *А* і *В* до центра мас.

Перемножимо (2.27) відповідно на m_1 та m_2 і додамо їх:

$$m_1\vec{R} + m_2\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{l}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_2\vec{l}_2.$$

Але з (2.26) та (рис. 2.4) випливає, що $m_1\vec{l}_1 = -m_2\vec{l}_2$. Звідси

$(m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$, тобто

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}. \qquad (2.28)$$

Узагальнення формули (2.28) на випадок системи з n точок приводить до співвідношення (2.24). Запишемо вираз (2.23) для повного імпульсу системи, використавши значення радіуса-вектора центра мас:

$$\vec{p} = M\,\frac{d\vec{R}}{dt}, \tag{2.29}$$

де $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_c$ – швидкість центра мас усієї системи.

Тоді співвідношення (2.29) можна записати у вигляді:

$$\vec{p} = M\vec{v}_c, \tag{2.30}$$

тобто імпульс системи матеріальних точок дорівнює імпульсу, який би мав центр мас, коли б у ньому зосереджувалась уся маса системи, або імпульс системи дорівнює імпульсу центра мас.

Оскільки для замкненої системи імпульс залишається сталим, тобто $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_n = M\vec{v}_c = const$, то центр мас замкненої системи рухається рівномірно і прямолінійно: $\vec{v}_c = const$.

Тому центр мас іноді називають центром інерції.

Якщо початок координат інерціальної системи відліку, відносно якої розглядається рух, розташувати в центрі мас, то $\vec{R} = 0$ і $\vec{v}_c = 0$, а отже, й $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = 0$.

Центр мас у вибраній таким способом системі відліку перебуває в стані спокою за будь-яких змін усередині системи, а імпульс системи дорівнює нулю.

Наприклад, якщо центр мас системи, яка складається з гармати та снаряду до пострілу, перебуває в стані спокою відносно Землі, то цей центр мас буде нерухомим і після пострілу. Снаряд і сама пушка одержать однакові імпульси, напрямлені в протилежні боки.

Повертаючись до рівняння (2.18), виразимо сумарний імпульс системи через імпульс центра мас:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_c\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{2.31}$$

Якщо прискорення центра мас позначити $\vec{a}_c$, то $\dfrac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{a}_c$. Тоді співвідношення (2.31) запишеться у вигляді

$$M\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \qquad (2.32)$$

Таким чином, якщо на систему діятимуть зовнішні сили, то центр мас рухатиметься так, ніби векторна сума всіх зовнішніх сил діяла на повну масу, зосереджену в центрі мас системи.

Змінити рух центра мас можуть лише зовнішні сили. Якщо $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, то центр мас рухається рівномірно і прямолінійно (або перебуває в стані спокою). Таким чином, якщо розглядаємо поступальний рух будь-якої системи матеріальних точок, то досить спостерігати за рухом її центра мас. Для розв'язання багатьох задач достатньо знати, як рухається центр мас системи.

2.7. Рух системи зі змінною масою

У природі та техніці часто доводиться зустрічати такі тіла або системи тіл, маса яких змінюється в процесі руху, наприклад ракети різних класів, реактивні снаряди, крижина, яка плаває та розтає, веретено, з якого змотується нитка, та ін. Систему, маса якої з часом безперервно змінюється, внаслідок приєднання або відокремлення від неї деяких тіл, прийнято називати системою зі змінною масою.

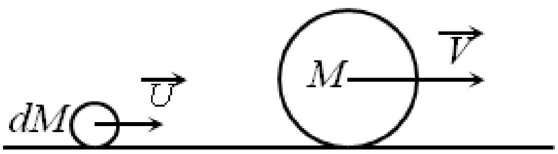

Рис. 2.5

Розглянемо тіло масою M (рис. 2.5). Нехай у момент часу t тіло M має швидкість $\vec{v}$, а тіло dM – швидкість $\vec{u}$. Імпульс системи двох тіл до зіткнення в момент часу t

$$\vec{p}(t) = M\vec{v} + dM\vec{u} .$$

Унаслідок не пружнього зіткнення маса тіла M збільшується і в момент $t + dt$ дорівнює $M + dM$, а швидкість становить $\vec{v} + d\vec{v}$. Імпульс системи в момент часу $t + dt$

$$\vec{p}\left(t + dt\right) = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}).$$

Таким чином, зміна імпульсу запишеться у вигляді

$$d\vec{p} = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - (M\vec{v} + dM\vec{u}) \qquad (2.33)$$

Нехтуючи величиною $dmdv$ вищого порядку малості $dmdv << dM\vec{V}$ вираз (2.33) перепишемо так:

$$d\vec{p} = Md\vec{v} + dM(\vec{v} - \vec{u}). \qquad (2.34)$$

Згідно з другим законом Ньютона

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \qquad (2.35)$$

де $\vec{F}$ – сумарна зовнішня сила, яка діє на систему.

Таким чином, із (2.34) і (2.35) одержимо

$$Md\vec{v} + dM(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{F}dt$$

або

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{dM}{dt}. \qquad (2.36)$$

Із формули додавання швидкостей класичної механіки $\vec{u} = \vec{v}_{відн} + \vec{v}$ випливає, що $\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_{відн}$, де $\vec{v}_{відн}$ – швидкість тіла масою dM відносно тіла *M*.

Тоді рівняння (2.36) набуває вигляду

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_{відн}\frac{dM}{dt}. \qquad (2.37)$$

Співвідношення(2.37) є рівнянням руху системи зі змінною масою, його називають рівнянням Мещерського. Перший доданок у правій частині рівняння (2.37) $\vec{F}$ описує сумарну зовнішню силу, яка діє на систему (у разі руху ракети до $\vec{F}$ доцільно включити силу ваги, силу опору повітря і т.п.). Другий доданок у правій частині (2.37) $\vec{v}_{відн}\dfrac{dM}{dt}$ має розмірність сили і тому його можна трактувати як силу, яка виникає внаслідок зміни маси тіла *M*. Її називають реактивною силою.

Розглянемо розв'язання рівняння Мещерського (2.37) щодо руху ракети, на яку не діють зовнішні сили ($\vec{F}=0$). Вважаємо, що $\vec{v}_{відн}$ відносна швидкість частинок, які відокремлюються, постійна за величиною і напрямом, причому вектор $\vec{v}_{відн}$ – протилежний вектору початкової швидкості $\vec{v}$ (рис. 2.6).

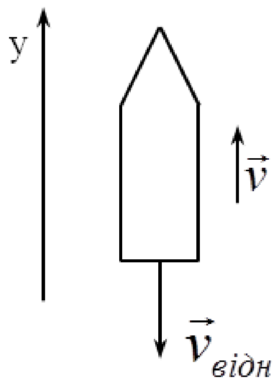

Рис. 2.6

Рівняння (2.37) набуває вигляду

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{v}_{відн}\frac{dM}{dt}. \qquad (2.38)$$

Спроектуємо рівняння (2.38) на вертикальну вісь *y*:

$$M\frac{dv}{dt}=-v_{відн}\frac{dM}{dt} \qquad (2.39)$$

Інтегруємо (2.39)

$$\int_{v_0}^{v} dv=-v_{відн}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}. \qquad (2.40)$$

$$v=v_0+v_{відн}\ln\frac{M_0}{M}, \qquad (2.41)$$

де M – маса ракети в момент часу, коли швидкість набуває значення v,

M_0 – початкова маса ракети, яка містить масу палива та масу корпусу ракети з усім її обладнанням.

Формулу (2.41) одержав Ціолковський у 1903 р. і тому її названо на його честь. Із неї випливає, що швидкість v, яку набуває ракета за відсутності зовнішніх сил, прямо пропорційна $v_{відн}$ (відносної швидкості часток, що відокремлюються), і натуральному логарифму відношення початкової та кінцевої мас ракети.

Швидкість v не залежить від того, за яким законом змінюється маса ракети: важливо знати лише початкові та кінцеві значення цієї маси.

Візьмемо в формулі (2.41) $v_0=0$, тобто початкова швидкість ракети дорівнює нулю. Припустимо, наприклад, що ракеті необхідно надати першу космічну швидкість, тобто таку, щоб вона почала рухатися навколо Землі по колу. Ця швидкість $v = 8 км/с$. Також припустимо, що швидкість витоку газового струменя $v_{відн} = 1 км/с$, тоді з (2.41) випливає, що $M_0/M = 2980$, тобто початкова маса ракети перевищує кінцеву в 2980 разів. Практично вся маса ракети має належати до маси палива. Збільшуючи $\vec{v}_{відн}$, наприклад, до 4 км/с, одержуємо $M_0/M = 7{,}39$. Тобто, якщо збільшити швидкість витоку газового струменя, то з'явиться можливість збільшити корисну масу ракети.

Ідею одержання космічних швидкостей за допомогою ракет уперше сформулював Ціолковський. Він запропонував використати так звані багатоступеневі ракети. Спочатку працюють двигуни першого ступеня. Коли паливо цього ступеня повністю згорить, він відокремиться від основної маси і в цей момент почнуть працювати двигуни другого ступеня і т.д.

Приклади розв'язання задач

<u>Задача № 2.1</u> На похилій площині кут нахилу якої α, що рухається вправо без тертя з прискоренням a, знаходиться брусок масою m (рис.3). Брусок рухається відносно похилої площини з прискоренням a', причому коефіцієнт тертя дорівнює k. Визначити прискорення a' бруска відносно поверхні і тиск бруска на поверхню .

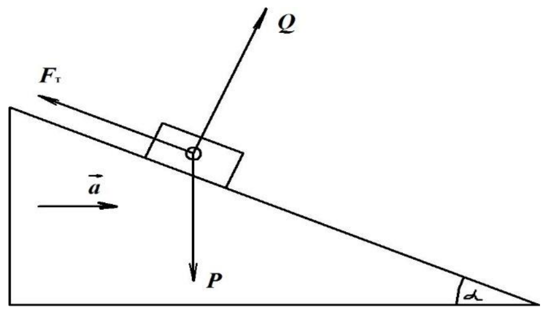

рис.3

Розв'язок:

Абсолютне прискорення бруска є векторною сумою його відносного прискорення $\vec{a}'$, і переносного прискорення $\vec{a}$, яке дорівнює прискоренню похилої площини. Запишемо векторне рівняння:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a} + m\vec{a}'.$$

Проектуємо на напрям $\vec{Q}$ та $\vec{a}'$:

$$-mg\cos\alpha + Q = ma\sin\alpha\,;$$

$$-kQ + mg\sin\alpha = ma\cos\alpha + ma'.$$

З цих двох рівнянь знаходимо:

$$F_{тиск} = Q = m(a\sin\alpha + g\cos\alpha)\,;$$

$$a' = -k(a\sin\alpha + g\cos\alpha) + (g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

Запитання

1. Інерціальні системи відліку.
2. Перший закон Ньютона.
3. Другий закон Ньютона. Рівняння руху тіла.
4. Третій закон Ньютона. Пояснення.
5. Практичне застосування законів Ньютона.
6. Центр мас.
7. Рух тіла зі змінною масою.

Список літератури:

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. Навчальний посібник для студентів вищих тех. і пед. закладів освіти. Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик; За ред. І.М. Кучерука –К.:Техніка, 1999. –536с.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика / Д.В. Сивухин –М.: Наука, 1974. –519с.

3. Иродов И.Е. Механика. Основые законы / И.Е. Иродов – 6-е изд., испр. –М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. –309с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. / И.В. Савельев –М.: Наука, 1970. –508с.

Рекомендований до перегляду відеоматеріал:

5. https://www.youtube.com/watch?v=v2jtrCq4J7Q

6. https://www.youtube.com/watch?v=t6BtHcBmjz0

7. https://www.youtube.com/watch?v=i7hLHVWyq4M

8. https://www.youtube.com/watch?v=9uvnK8O8bqQ
9. https://www.youtube.com/watch?v=YDIH7YuCahY
10. https://www.youtube.com/watch?v=qWTfIAWH4oM

Розділ 3. РОБОТА ТА ПОТУЖНІСТЬ

3.1. Робота та потужність

Припустимо, що матеріальна точка під дією сталої сили $\vec{F}$ за нескінченно малий проміжок часу dt переміщується на відстань $d\vec{r}$ (рис. 3.1). Скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення називається елементарною роботою сили $\vec{F}$:

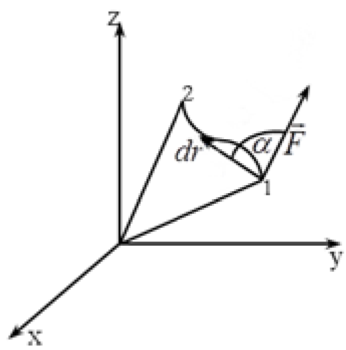

Рис. 3.1

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\alpha, \tag{3.1}$$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$. Якщо кут $\alpha < 90°$, то робота, яка відбувається в разі переміщення точки, додатна.

Якщо кут $\alpha = 90°$, коли сила напрямлена перпендикулярно до переміщення, то $\cos 90° = 0$ і робота не виконується. Якщо кут $\alpha > 90°$, то $\cos\alpha < 0$ і робота буде негативною.

Запишемо вектори $\vec{F}$ і $d\vec{r}$ через проекції на координатні осі:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z;\ d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

де F_x, F_y, F_z, проекції вектора $\vec{F}$ на координатні осі, x, y, z – координати точки, до якої прикладається сила $\vec{F}$.

Тоді вираз (3.1) для елементарної роботи має вигляд

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{3.2}$$

Щоб знайти роботу *A* сили $\vec{F}$ в разі деякого кінцевого переміщення від точки *1* до точки *2*, умовно розіб'ємо його на нескінченно малі переміщення $d\vec{r}$, на кожному з яких силу можна вважати сталою, а елементарна робота δA_i визначатиметься з (3.1). Тоді робота сили в разі переміщення з точки 1 до точки 2

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta A_i = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}\,. \qquad (3.3)$$

Ураховуючи співвідношення (3.2), вираз для роботи можна записати так

$$A = \int_1^2 F_x dx + \int_1^2 F_y dy + \int_1^2 F_z dz\,. \qquad (3.4)$$

Отже, робота змінної сили на кінцевому переміщенні AB визначається криволінійним інтегралом вздовж траєкторії.

Одиницею роботи в СІ є джоуль, що являє собою згідно з (3.1) роботу сили в $1H$ на шляху в $1м$:

$$1Дж = 1H\cdot 1м\,.$$

У ряді випадків важливо знати не лише роботу, а й час, протягом якого її виконано. Роботу, яка виконується за одиницю часу, називають потужністю:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}\,. \qquad (3.5)$$

Потужність дорівнює скалярному добутку векторів сили та швидкості.

Вираз (3.5) можна записати через проекції на координатні осі:

$$N = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z\,.$$

Із (3.5) випливав, що потужність можна підвищувати за рахунок збільшення як сили, так і швидкості руху.

Якщо задано потужність як функцію від часу, то можна визначити роботу за деякий проміжок часу від t_1 до t_2. Із (3.5) випливає, що

$$A = \int_{t_1}^{t_2} Ndt\,.$$

У СІ одиницею потужності є Ват: 1 Вт – це потужність, при якій за 1 с виконується робота в 1 Дж.

3.2. Кінетична енергія

Припустимо, що в разі переміщення матеріальної точки з положення *1* у положення *2* під дією сили $\vec{F}$ її швидкість змінюється від v_1 до v_2. Рух матеріальної точки описується другим законом Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{3.6}$$

Обидві частини рівняння (3.6) скалярно помножимо на вектор переміщення $d\vec{r}$:

$$\vec{F}d\vec{r} = d\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v}. \tag{3.7}$$

Оскільки $\vec{F}d\vec{r} = \delta A$, то співвідношення (3.7) набуває вигляду

$$\delta A = m\vec{v}\,d\vec{v}. \tag{3.8}$$

Далі візмемо до уваги, що $\vec{v}d\vec{v} = vdv$. Це є наслідком очевидної рівності $\vec{v}^2 = v^2$. Насправді $\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = vv\cos 0 = v^2$. Продиференціювавши останнє співвідношення, одержимо $2\vec{v}\,d\vec{v} = 2v\,dv$.

Отже,

$$\vec{v}\,d\vec{v} = v\,dv. \tag{3.9}$$

Важливо підкреслити, що це співвідношення справджується не лише для вектора швидкості $\vec{v}$, а й для будь-яких інших векторів, наприклад $\vec{r}\,d\vec{r} = r\,dr$.

Беручи це до уваги, формулу (3.8) запишемо так:

$$\delta A = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{3.10}$$

Інтегруючи (3.10) уздовж траєкторії руху матеріальної точки від положення *1* до положення *2*, в яких швидкість набуває значень v_1 і v_2 дістанемо

$$A=\int_1^2 \delta A=\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}$$

або

$$A=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}. \tag{3.11}$$

Таким чином, робота сили в разі переміщення матеріальної точки дорівнює зміні деякої величини. Отже, величина $mv^2/2$ може характеризувати здатність тіла виконати роботу. <u>Фізичну величину, яка характеризує здатність тіла або системи тіл виконувати роботу, називають енергією.</u> Енергія, яку має тіло, що рухається зі швидкістю *v*, називають кінетичною та позначають E_K

$$E_K=\frac{mv^2}{2}. \tag{3.12}$$

Якщо кінетичну енергію матеріальної точки в кінцевому стані позначимо $E_{K_2}=\dfrac{mv_2^2}{2}$, а в початковому $E_{K_1}=\dfrac{mv_1^2}{2}$, то співвідношення (3.11) можна переписати у вигляді

$$A=E_{K_2}-E_{K_1}. \tag{3.13}$$

Отже, робота сили у разі переміщення матеріальної точки дорівнює зміні кінетичної енергії цієї точки. Якщо робота додатна, то $E_{K_2}>E_{K_1}$ тобто кінетична енергія зростає. Якщо робота від'ємна (дія сил напрямлена проти напряму руху й гальмує його), то кінетична енергія зменшується:

$$E_{K_2}<E_{K_1}.$$

Важливо підкреслити, що тут йдеться про роботу рівнодіючої всіх сил, прикладених до точки. Це безпосередньо випливає з того, що співвідношення (3.13) одержано з рівняння другого закону Ньютона (3.6), в якому під силою $\vec{F}$ розуміють саме рівнодіючу всіх сил. Співвідношення (3.13) називають <u>теоремою про кінетичну енергію</u>.

Одержаний результат (3.13) узагальнюється на випадок довільної системи

n матеріальних точок.

Кінетичною енергією системи називають суму кінетичних енергій матеріальних точок, з яких складається ця система:

$$E_K = \sum_{i=1}^{n} E_{Ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2},$$

де E_{Ki} – кінетична енергія окремої i-ї матеріальної точки; m_i, v_i – маса і швидкість i-ї точки системи.

Зміна кінетичної енергії системи дорівнює алгебраїчній сумі робіт сил, які діють на цю систему: зовнішніх $\vec{F}_i$ і внутрішніх $\vec{f}_{ik}$.

Згідно з (3.13)

$$dE_K = \delta A^{зовн} + \delta A^{внут}.$$

Наприклад, якщо система складається із n матеріальних точок, то

$$dE_K = \sum_{ш=1}^{m} \vec{F}_i^{зовн} d\vec{r}_i + \sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} f_{ik} d\vec{r}_i,$$

де $\vec{r}_i$ – радіус-вектор i-ї точки.

Якщо система не деформується, тобто відстань між матеріальними точками не змінюється, то

$$\delta A^{внут} = 0;\ \delta E_K = \delta A^{зовн}, \tag{3.14}$$

тобто зміна кінетичної енергії такої системи визначається роботою зовнішніх сил.

Відзначимо, що кінетична енергія залежить від вибору системи відліку, оскільки швидкість є відносною величиною. Наприклад, кінетична енергія автомобіля, що рухається, виявляється різною для спостерігача, який стоїть на узбіччі дороги, і спостерігача, який сидить у поїзді, що їде паралельно автомобілю.

3.3. Потенціальна енергія

У розглянутих раніше випадках робота сили $\vec{F}$, прикладеної до матеріальної точки, витрачалася на зміну її кінетичної енергії. У той самий час іноді під час виконання роботи кінетична енергія не змінюється. Припустимо, що пружину, масою якої можна знехтувати, закріплено одним кінцем до стінки. Виберемо систему координат так, щоб кінець не розтягненої пружини перебував у точці $X = 0$ (рис. 3.2). Розтягуватимемо пружину, приклавши до її другого кінця деяку зовнішню силу $\vec{F}$.

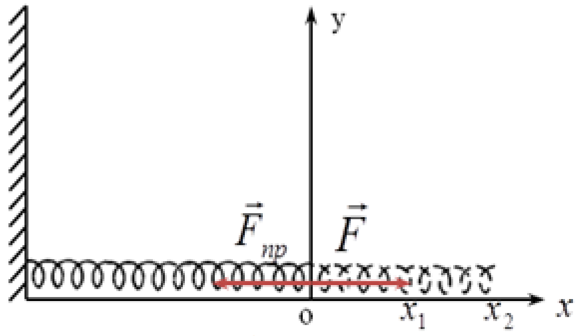

Рис. 3.2

Крім сили $\vec{F}$ на пружину діятиме сила пружності, яка в межах пружності підпорядковується закону Гука:

$$\vec{F}_{пр} = -k\vec{x},$$

де k – коефіцієнт пружності пружини.

У момент початку спостережень $(t = t_0)$ швидкість кінця пружини дорівнює v, а її положення визначається координатою x_1. У процесі розтягнення пружини від x_1 до x_2 збільшуватимемо зовнішню силу $\vec{F}$ так, щоб $\vec{F} = -\vec{F}_{пр}$. У разі такого переміщення швидкість частинок пружини залишається сталою й кінетична енергія не змінюється.

Робота, яка виконується зовнішньою силою $\vec{F}$, у разі нескінченно малого переміщення dx визначиться так: $\delta A = \vec{F}d\vec{x}$. Тоді робота, яка виконується в разі розтягнення пружини від x_1 до x_2,

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}d\vec{x}.$$

Оскільки $\vec{F} = -\vec{F}_{пр} = k\vec{x}$, то

$$A = \int_{x_1}^{x_2} k\vec{x}d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \qquad (3.15)$$

Отже, робота сили виявилась такою, що дорівнює зміні деякої величини

$\frac{kx^2}{2}$, яка залежить від стану системи (пружини). Позначимо $\frac{kx_1^2}{2}=U_1$; $\frac{kx_2^2}{2}=U_2$. Тоді (3.15) можна записати у вигляді

$$A=U_2-U_1. \tag{3.16}$$

Оскільки $x_2>x_1$, то $U_2>U_1$; $\Delta U=U_2-U_1>0$, $\Delta U>0$, тобто робота зовнішньої сили приводить до збільшення величини $U=\frac{kx^2}{2}$.

Розглянемо тепер роботу сили пружності, яка є внутрішньою силою системи.

Припустимо, що в точці x_2 пружину відпустили. У разі переміщення від x_2 до x_1 сила пружності збігається з напрямкомх, тому $\vec{F}_{пр}=k\vec{x}$.

Тоді

$$A=\int_{x_2}^{x_1}\vec{F}_{пр}d\vec{x}=\int_{x_2}^{x_1}k\vec{x}d\vec{x}=\int_{x_2}^{x_1}kxdx=\frac{kx_1^2}{2}-\frac{kx_2^2}{2}=U_1-U_2=-\Delta U. \tag{3.17}$$

Оскільки $x_1<x_2$, то $U_1<U_2$. Таким чином, робота сил пружності приводить до зменшення величини $kx^2/2$. Можна сказати, що за рахунок U виконується робота силою пружності. Таким чином, величина $kx^2/2$ характеризує в даному разі здатність системи виконувати роботу. Отже, величину U можна, як і E_K, назвати енергією. На відміну від кінетичної енергії ця енергія залежить не від швидкості руху, а від взаємного розташування частинок пружини. Цей вид енергії дістав назву потенціальної енергії.

Таким чином, робота сил пружності (внутрішньої сили системи) приводить до зменшення потенціальної енергії системи. Потенціальна енергія залежить також від взаємного розташування взаємодіючих тіл системи.

Вважатимемо, що деяка сила $\vec{F}$ переміщує тіло масою m вертикально вгору поблизу поверхні Землі. З боку Землі на тіло діє сила тяжіння $\vec{P}=m\vec{g}$ (рис. 3.3). Спрямуємо вісь z вертикально вгору. У разі переміщення з положення z_1 у z_2 зовнішня сила $\vec{F} = -\vec{P}$. Тоді робота зовнішньої сили $\vec{F}$

$$A = \int_{z_1}^{z_2} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{z_1}^{z_2} \vec{P} d\vec{z} = -\int_{z_1}^{z_2} P \cos\alpha dz = \int_{z_1}^{z_2} mgdz = mg\left(z_2 - z_1\right) = mgz_2 - mgz_1. \tag{3.18}$$

Таким чином, у даному разі робота визначатиметься зміною деякої величини mgz, яка залежить від положення тіла відносно Землі. Причому, оскільки $z_2 > z_1$, то робота зовнішньої сили $\vec{F}$ приведе до збільшення величини mgz: $A > 0$.

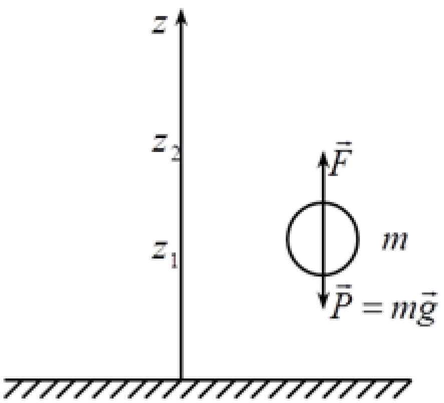

Рис. 3.3

Тепер припустимо, що на висоті z_2 сила $\vec{F}$ перестала діяти і тіло падає під дією сили тяжіння. Розрахуємо роботу сили тяжіння, яка є внутрішньою для системи, що включає дане тіло і Землю:

$$A = \int_{z_2}^{z_1} \vec{P} d\vec{z} = \int_{z_2}^{z_1} P \cos\alpha dz = mgz_1 - mgz_2 . \tag{3.19}$$

Оскільки $z_1 < z_2$, то величина mgz зменшується під час виконання роботи силою тяжіння. Таким чином, за рахунок величини mgz сила тяжіння виконує роботу. Тому величина mgz характеризує в даному разі <u>здатність сили</u> виконувати роботу і може називатися потенціальною енергією:

$$U = mgz \qquad (3.20).$$

Тоді співвідношення (3.19) можна переписати у вигляді

$$A = mgz_1 - mgz_2 = U_1 - U_2 = -\Delta U < 0, \tag{3.21}$$

Отже, робота внутрішньої сили збільшує потенціальну енергію системи. А робота сили тяжіння приводить до зменшення потенціальної енергії: Співвідношення (3.19) не буде порушуватись, якщо припустимо, що

$$U_1 = mgz_1 + C,$$

$$U_2 = mgz_2 + C,$$

де C – довільна стала, яка має розмірністю енергії. Оскільки z_1 і z_2, можуть набувати будь-яких значень, то на будь-якій висоті потенціальна енергія тіла в полі сили тяжіння

$$U = mgz + C. \tag{3.22}$$

Аналогічні міркування справджуються й відносно потенціальної деформованої енергії пружини:

$$U = \frac{kx^2}{2} + C.$$

Це означає, що потенціальна енергія може бути визначена лише з точністю до деякої сталої C. Невизначеність числового значення потенціальної енергії пов'язана з тим, що співвідношення (3.19) і (3.17) визначають лише різницю потенціальних енергій у двох положеннях, але не зазначають, в якому з них вона дорівнює нулю. Тоді вибір початку відліку потенціальної енергії виявляється довільним. Якщо потенціальну енергію будемо відліковувати від рівня Землі, тобто припустимо, що коли $z = 0$ і $U(0) = 0$, то довільна константа у виразі (3.22) обернеться в нуль. Тоді загальна формула для потенціальної енергії в полі сили тяжіння $U = mgz$.

Потенціальна енергія може бути як додатною, так і від'ємною (для рівнів, розташованих нижче від нульових). Нагадаємо, що кінетична енергія завжди додатна. Таким чином, приходимо до висновку, що не можемо знати абсолютно точного значення потенціальної енергії. Це, як було показано, однаковою мірою справджується і для кінетичної енергії, яка також є відносною величиною. Видатний англійський фізик Джеймс Максвел так охарактеризував цей стан: "Ми повинні так розглядати енергію системи тіл, як величину, відносно якої ми можемо встановити, відбувається її збільшення або зменшення в разі переходу системи з одного положення в інше. Абсолютне значення енергії за стандартних умов нам невідома, і це не має для нас значення, оскільки всі явища визначаються змінами енергії, а не її абсолютним значенням."

3.4. Консервативні та неконсервативні сили

Сили, що існують в природі, поділяються на консервативні та неконсервативні. Сили, робота яких не залежить від траєкторії, а визначаються лише початковим і кінцевим розташуванням тіла в просторі називають консервативними. До них належать сили тяжіння, пружності та електростатичні сили взаємодії заряджених тіл. Для консервативних сил характерною особливістю є те, що робота цих сил за замкненим контуром дорівнює нулю. Справді, якщо у виразах (3.17) і (3.19) припустити, що робота відбувається за замкненою траєкторією, тобто якщо $x_2 \to x_1$ або $z_2 \to z_1$, робота дорівнюватиме нулю, тобто

$$A = \oint \vec{F}_{конст} d\vec{r} = 0. \qquad (3.23)$$

До консервативних належать також центральні сили $\vec{F}(\vec{r})$. Сили $\vec{F}(\vec{r})$ називаються центральними, якщо вони напрямлені в одну точку (або від цієї точки) і залежать лише від відстані до цієї точки. До цих сил належать сили електростатичної та гравітаційної взаємодії.

На матеріальну точку, яка перебуває в полі Земного тяжіння, діють гравітаційні сили, що визначаються із закону всесвітнього тяжіння Ньютона:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \qquad (3.24)$$

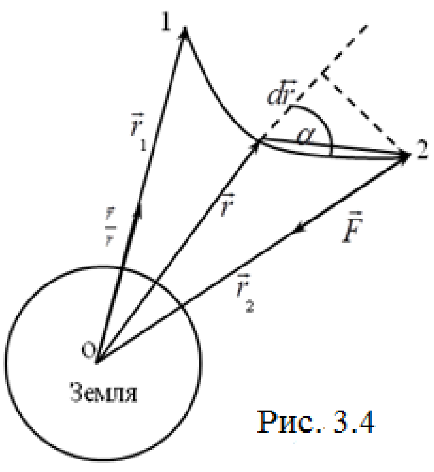

Рис. 3.4

де M – маса Землі; $\frac{\vec{r}}{r}$ – одиничний вектор, напрямлений по радіусу від центра Землі (початок координат O – у центрі Землі) (рис. 3.4).

У разі переміщення з положення *1* у положення *2* (рис. 3.4) робота, яка виконується силою тяжіння, запишеться у вигляді:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = -\gamma m M \int_1^2 \frac{\vec{r} d\vec{l}}{r r^2}, \tag{3.25}$$

де $d\vec{l}$ – вектор нескінченно малого переміщення.

Перетворимо скалярний добуток під інтегралом $\vec{r}\, d\vec{l} = r\, dl \cos\alpha$. Оскільки $dl \cos\alpha$ – проекція переміщенняна напрям вздовж радіуса $dr = dl \cos\alpha$. Таким чином, V: $\vec{r} d\vec{l} = r dr$. Отже, інтеграл (3.25) перетворимо до виразу

$$A = \gamma m M \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

або

$$A = \gamma \frac{mM}{r_2} - \gamma \frac{mM}{r_1}. \tag{3.26}$$

Таким чином, робота сил гравітації не залежить від форми траєкторії, а визначається лише положенням початкової та кінцевої точок переміщення. Робота гравітаційної сили за замкненим контуром $r_2 \to r_1$, дорівнює нулю. Таким чином, гравітаційна сила є консервативною.

Як було встановлено в (3.17) і (3.21), робота консервативних сил системи дорівнює зменшенню потенціальної енергії, тобто

$$A = -\Delta U = -\left(U_2 - U_1\right). \tag{3.27}$$

Порівнявши вирази (3.26) і (3.27), одержимо

$$A = \gamma \frac{mM}{r_2} - \gamma \frac{mM}{r_1} = -\left(U_2 - U_1\right). \tag{3.28}$$

Звідси випливає, що:

$$U_2 = -\gamma \frac{mM}{r_2};$$

$$U_1 = -\gamma \frac{mM}{r_1}.$$

Таким чином, гравітаційну потенціальну енергію на будь-якій відстані від центра Землі можна записати у вигляді:

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + C, \tag{3.29}$$

де C – довільна стала. Припустимо, що коли $r \to \infty$, тоді $U = 0$. І тоді потенціальна енергія гравітаційної взаємодії з (3.29) випливає, що стала $C = 0$

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r}. \tag{3.29^1}$$

Коли тіло наближається до Землі, то його від’ємна потенціальна енергія зменшується (рис. 3.5).

Уведемо поняття силового поля, під яким розуміють ту ділянку простору, у кожній точці якого на привнесену туди частинку діє сила, яка закономірно змінюється від точки до точки (наприклад, поле сили тяжіння або поле сил опору в струмені рідини). Якщо сила в кожній точці силового поля не залежить від часу, таке поле називають стаціонарним. У стаціонарному силовому полі сила залежить лише від положення частинки $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

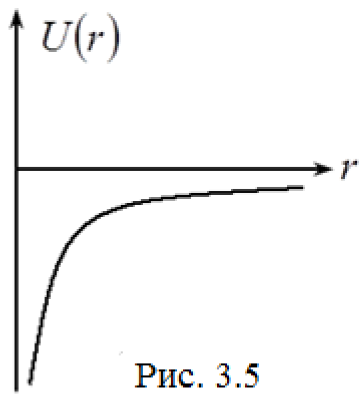

Рис. 3.5

Узагальнюючи властивості сил, які розглядались, уведемо поняття <u>потенціального силового поля. Стаціонарне силове поле називають потенціальним, якщо робота сил поля, прикладених до матеріальної точки, не залежить від її траєкторії, а є однозначною функцією координат початкового та кінцевого її положення.</u> Сили, які діють у стаціонарному полі, є <u>консервативними.</u>

Якщо робота залежить не лише від положення початкової та кінцевої точок, а й від форми траєкторії або від швидкості, то значення U стає невизначеним у кожній точці поля.

Сили, які діють у не потенціальному полі, називають <u>не консервативними.</u> До них належать передусім, так звані дисипативні сили (тобто сили тертя, які виникають у разі ковзання одного тіла по поверхні іншого; сили опору, якого зазнає тіло, коли рухається в рідкому чи газоподібному середовищі). Ці сили можуть залежати від відносної швидкості тіл, які рухаються, і бути напрямленими проти напряму руху. Тому робота сил тертя завжди від'ємна. До неконсервативних належать також гіроскопічні сили. Ці сили залежать від швидкості руху тіла й напрямлені перпендикулярно до цієї швидкості. Робота цих сил завжди дорівнює нулю. Прикладом таких сил є сила Лоренца і сила Коріоліса в неінерціальних системах відліку.

3.5. Зв'язок консервативної сили з потенціальною енергією

У потенціальному силовому полі, як було встановлено в (3.17), (3.22) та (3.28), робота консервативних сил пов'язана з зменшенням потенціальної енергії: $A = -\Delta U$. Це співвідношення для нескінченно малого переміщення матеріальної точки $d\vec{r}$ можна записати у вигляді

$$\delta A = -dU\,, \tag{3.30}$$

де $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$ – елементарна робота консервативної сили; dU – приріст потенціальної енергії матеріальної точки, яка є повним диференціалом функції $U = U(x, y, z)$.

Під повним диференціалом деякої функції слід вважати її приріст, який визначається приростом усіх змінних, від яких вона залежить. Наприклад, якщо задано деяку функцію $\Phi = \Phi(x, y)$, то її повний диференціал

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dy.$$

Повному диференціалу будь-якої функції притаманна така властивість: інтеграл по замкненому контуру від повного диференціала дорівнює нулю, тобто

$$\oint d\Phi = \int_1^{2\to 1} d\Phi = \Phi(1) - \Phi(1) = 0.$$

Як відомо з попереднього розгляду, потенціальна енергія $U = U(x, y, z)$ як раз і має такі властивості: $\oint dU = 0$.

Тому можна записати

$$dU = \frac{-\partial U}{\partial x}dx + \frac{-\partial U}{\partial y}dy + \frac{-\partial U}{\partial z}dz. \qquad (3.31)$$

Похідні $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial Y}$ та $\frac{\partial U}{\partial z}$ є частковими. Обчислюючи їх, вважають, що всі інші аргументи функції є сталими величинами. Наприклад, визначаючи $\frac{\partial U}{\partial x}$, вважаємо y і z – сталими.

Співвідношення (3.30) можна записати через проекції вектора сили на координатні осі:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнта при dx, dy, dz маємо

$$F_x = \frac{-\partial U}{\partial x};\ F_y = \frac{-\partial U}{\partial y};\ F_z = \frac{-\partial U}{\partial z}. \qquad (3.32)$$

Оскільки $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$,

$$\vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial Z}\right). \qquad (3.33)$$

У правій частині виразу (3.33) записано деякий вектор із складовими $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$. Цей вектор називають градієнтом скалярної функції координат $U = U(x, y, z)$ і позначають символом $gradU$ або ∇U:

$$gradU = \nabla U = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial Z}.$$

Знак ∇ називають оператором "набла".

Таким чином, вираз (3.33) перепишемо у вигляді

$$\vec{F} = -gradU = -\nabla U, \qquad (3.34)$$

Це співвідношення виражає залежність між консервативною силою та потенціальною енергією. Знак "–" зазначає, що консервативна сила $\vec{F}$ спрямована в бік зменшення потенціальної енергії.

Поняття градієнта широко використовують у різних розділах фізики. Можна говорити про градієнт не тільки функції U, а й будь якої іншої скалярної функції. Співвідношення (3.34) дає змогу визначити $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$, якщо відома функція $U\left(\vec{r}\right)$. Наприклад, якщо потенціальна енергія матеріальної точки в деякому полі

$$U\left(x,y\right)=-\alpha xy,$$

де α – деяка стала, то

$$\vec{F}=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\alpha\left(y\vec{i}+x\vec{j}\right).$$

Розглянемо випадок, коли потенціальна енергія $U\left(\vec{r}\right)=\vec{a}\cdot\vec{r}$, де $\vec{a}$ – сталий вектор; $\vec{r}$ – радіус-вектор точки поля. Функцію U запишемо у вигляді $U=a_x x+a_y y+a_z z$. Тоді

$$\vec{F}=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial Z}\right)=-\left(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z\right)=-\vec{a}\,.$$

3.6. Закон збереження повної механічної енергії матеріальної точки

Повною механічною енергією E матеріальної точки називають суму кінетичної енергії механічного руху E_K та потенціальної енергії взаємодії U:

$$E=E_K+U\,. \tag{3.35}$$

Припустимо, що на матеріальну точку крім сил потенціального поля діє також деяка неконсервативна сила, наприклад сила тертя. Нехай матеріальна точка зміститься з положення *1* в положення *2*. При цьому її швидкість змінюється від значення v_1 в першому положенні до значення v_2 у другому. З'ясуємо, як при цьому зміниться її повна механічна енергія. У разі нескінченно малого переміщення $d\vec{r}$ приріст кінетичної енергії, як випливає з (3.10), дорівнює елементарній роботі всіх сил, які діють на матеріальну точку, тобто

$$dE_K = \delta A^{кон} + \delta A^{некон}. \qquad (3.36)$$

Ураховуючи, що робота консервативних сил $\delta A^{кон} = -dU$ одержуємо $dE_K = -dU + \delta A^{некон}$ або $d(E_K + U) = \delta A^{некон}$. Оскільки $E_K + U = E$, то вираз (3.36) можна записати у вигляді

$$dE = \delta A^{некон}. \qquad (3.37)$$

Проінтегруємо (3.37), вважаючи, що в початковому положенні повна механічна енергія матеріальної точки дорівнює E_1, а в кінцевому – E_2:

$$E_2 - E_1 = A^{некон}.$$

Таким чином, зміна повної механічної енергії визначається роботою неконсервативних сил. Якщо неконсервативні сили виконують додатню роботу, тобто $\delta A^{некон} > 0$, то $E_2 > E_1$ і повна механічна енергія матеріальної точки збільшується. Якщо $\delta A^{некон} < 0$, то $E_2 < E_1$і повна механічна енергія зменшується. Наприклад, під час руху тіла робота сили тертя буде від'ємною. Кінетична енергія, а разом з нею і повна механічна енергія тіла зменшується. Відбувається перетворення механічної енергії в інші види енергії, наприклад в енергію теплового руху молекул.

Якщо робота неконсервативних сил дорівнює нулю ($A^{некон} = 0$), то $E_2 - E_1 = 0$ або $E_2 = E_1$. Звідси випливає, що $\left(E_K + U\right)_1 = \left(E_K + U\right)_2$.

Таким чином, <u>повна механічна енергія матеріальної точки в полі консервативних сил є сталою величиною за будь-яких переміщень точки. Це положення називають законом збереження повної мехінічної енергії.</u> Окремі складові повної механічної енергії, наприклад кінетична або потенціальна, можуть змінюватись, але так, що їх сума залишається сталою величиною.

Розглянемо тіло масою m, яке вільно падає без початкової швидкості з висоти h поблизу поверхні Землі. Його повна енергія в найвищій точці

$E_1 = U = mgh$, а в найнижчий $E_2 = E_K = \frac{mv^2}{2}$. Оскільки $v^2 = 2gh$, то $E_2 = E_K = \frac{mv^2}{2} = mgh$. Таким чином, $E_1 = E_2$. У будь-якій проміжній точці C на висоті h_C, де швидкість матеріальної точки дорівнює v_C, повна механічна енергія $E_C = \frac{mv^2}{2} + mgh_C$. Ураховуючи, що $v_C^2 = 2g\left(h - h_C\right)$, одержуємо

$$E_C = mgh = E_1 = E_2.$$

Із закону збереження енергії можна <u>визначити умови рівноваги тіла.</u> Припустимо, що матеріальна точка рухається в силовому полі вздовж осі *x* (рис. 3.6). Тоді її потенціальна енергія $U = U\left(x\right)$. Нехай повна енергія матеріальної точки $E = E_K + U\left(x\right)$. Матеріальна точка може рухатись лише в тих ділянках, де повна механічна енергія $E \geq U$, тобто в інтервалі $x_1 - x_2$, а також $x_3 - \infty$. Неприпустимими для руху точки будуть в інтервалі $x_2 - x_3$, а також область ліворуч точки x_1. Тут $E < U$, тобто $E_K + U < U$, що означає, що $E_K < 0$. Ці ділянки називають потенціальними бар'єрами.

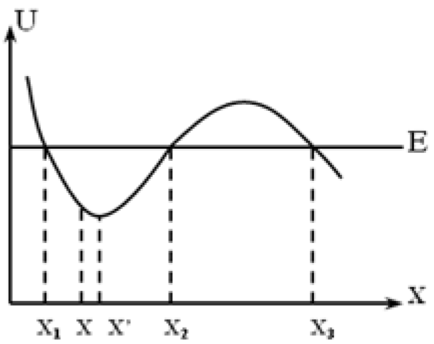

Рис. 3.6

Проаналізуємо рух матеріальної точки в проміжку $x_1 - x_2$. Нехай матеріальна точка перебуває в деякому положенні *x*. Її кінетична енергія визначається величиною $E - U\left(x\right)$. Якщо матеріальна точка рухається ліворуч, то її потенціальна енергія зростає, а це означає, що в точках *x* на неї діє сила, напрямлена праворуч. У положенні x_1, де $E = U$ і $U_K = 0$, швидкість матеріальної точки дорівнює нулю. Під дією сили, напрямленої вздовж осі *x*, вона повертається й рухається праворуч із наростанням швидкості. У точці x', де потенціальна енергія мінімальна, швидкість набуває максимального значення. На відрізку $x' - x_2$ на матеріальну точку діятиме сила, напрямлена ліворуч, яка приведе до зменшення швидкості. У положенні x_2 вона дорівнює нулю. Потім матеріальна точка знову рухатиметься ліворуч і т.д. Такий рух називають фінітним, а простір, де він відбувається, - потенціальною ямою. На відрізку $x_1 - x_2$, існує положення x', де матеріальна точка може перебувати в стані спокою. Ця точка x', де потенціальна енергія мінімальна, є точкою стійкої рівноваги.

Коли матеріальна точка перебуває праворуч x_3, то вона може рухатись аж до нескінченності. Такий рух називають інфінітним.

Особливий інтерес викликають положення, в яких потенціальна енергія має найменше або найбільше значення. У них $\frac{dU}{dx} = 0$, а тому сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює нулю, тобто тіло перебуває в стані рівноваги. Мінімум потенціальної енергії відповідає стану стійкої рівноваги, а максимум - нестійкої рівноваги. Рух навколо положення стійкої рівноваги є коливальним. Для тривимірного випадку умови рівноваги запишуться так: $\frac{dU}{dx} = 0$; $\frac{dU}{dy} = 0$; $\frac{dU}{dz} = 0$.

3.7. Закон збереження моменту імпульсу

Крім енергії та імпульсу існує ще одна механічна величина, якій притаманний закон збереження - момент імпульсу.

Розглянемо деяку матеріальну точку *A*, яка рухається зі швидкістю $\vec{v}$ відносно інерційної системи координат з початком у точці *O*, радіусом-вектором точки $\vec{r}$; її імпульс $\vec{p} = m\vec{v}$ (рис. 3.7). Моментом імпульсу матеріальної точки *A* відносно нерухомої точки *O* називають вектор $\vec{L}$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$ та вектора імпульсу $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\,\vec{p}\right]. \qquad (3.38)$$

Момент імпульсу $\vec{L}$ відносно точки є псевдовектором. Він розташований перпендикулярно до площини, в якій перебувають вектори $\vec{r}$ та $\vec{p}$. Модуль вектора моменту імпульсу

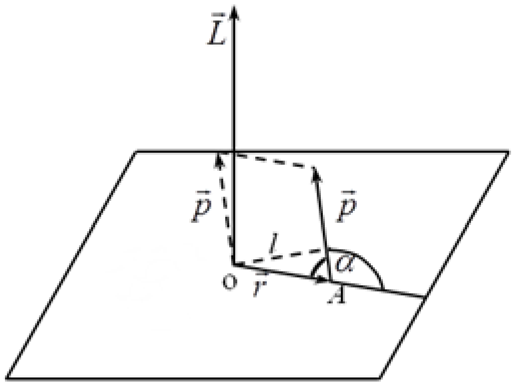

Рис. 3.7

$$L = r\,p\sin\alpha = l\,r \tag{3.39}$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ та $\vec{p}$.

Із (рис. 3.7) випливає, що $p\sin\alpha = l$ – довжина перпендикуляра з точки *O* до прямої, вздовж якої напрямлений вектор імпульсу матеріальної точки. Величину l називають плечем імпульсу відносно точки *O*.

З'ясуємо, яка саме механічна величина відповідає за зміну вектора моменту імпульсу $\vec{L}$.

Продиференціюємо (3.38) за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \tag{3.40}$$

Оскільки вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – це швидкість матеріальної точки, яка збігається за напрямом з вектором $\vec{p}$, то

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] = \left[\vec{v}, m\vec{v}\right] = 0.$$

Згідно з другим законом Ньютона $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, де $\vec{F}$ – рівнодійна всіх сил, прикладених до матеріальної точки.

Отже, з (3.40) випливає:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{3.41}$$

Величину, яка стоїть у правій частині рівняння (3.41), називають моментом сили $\vec{F}$ відносно точки *O*. Позначим її $\vec{M}$,

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{3.42}$$

Вектор $\vec{M}$, як і $\vec{L}$, є псевдовектором.

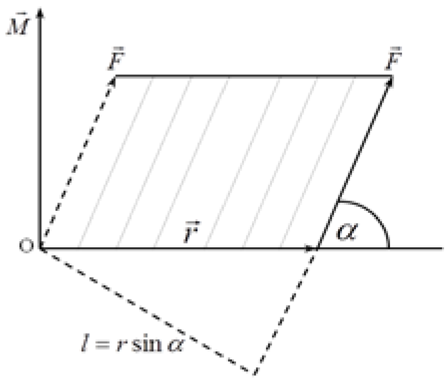

Рис. 3.8

Модуль вектора $\vec{M}$: $M = r\sin\alpha = rl$, де l – плече вектора $\vec{M}$ відносно точки *O* (рис. 3.8).

Якщо рух розглядається відносно прямокутної системи координат, то момент сили $\vec{M}$ відносно точки *O* можна навести у вигляді визначника

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \vec{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \vec{k}\left(xF_y - yF_x\right) \tag{3.43}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти вздовж координатних осей x, y, z, F_x, F_y, F_x – проекції вектора $\vec{F}$ на координатні осі,

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y; \\ M_y &= zF_x - xF_z; \\ M_z &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Використовуючи поняття моменту сили відносно точки *O* співвідношення (3.41) запишемо так:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{3.45}$$

Цей вираз називають <u>рівнянням моментів</u>, або <u>законом зміни моменту імпульсу матеріальної точки</u>. Швидкість зміни моменту імпульсу $\frac{d\vec{L}}{dt}$ матеріальної точки дорівнює моменту рівнодійної всіх сил, прикладених до цієї точки. Момент імпульсу $\vec{L}$ та момент сили $\vec{F}$ розглядаються відносно точки *O*. Рівняння (3.45) справджується лише для інерціальних систем відліку, оскільки лише в цьому разі виконується другий закон Ньютона.

Із рівняння моментів (3.45) випливає, що коли $\vec{M}=0$, то $\vec{L}=const$, тобто момент імпульсу відносно деякої точки O залишається незмінним, якщо дорівнюватиме нулю момент рівнодіючої всіх сил відносно тієї самої точки O, Момент сили $\vec{M}$ дорівнює нулю, якщо на матеріальну точку сили не діють або їх рівнодіюча дорівнює нулю, або вектор сили $\vec{F}$ проходить через точку O.

Розглянемо систему, яка складається з n матеріальних точок. Нехай $\vec{p}_i$ імпульс i-ї матеріальної точки. Момент імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки O

$$\vec{L}_i=\left[\vec{r}_i,\vec{p}_i\right]. \tag{3.46}$$

Тоді моментом імпульсу $\vec{L}$ системи відносно точки O називають векторну суму моментів імпульсу кожної матеріальної точки відносно точки O:

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i,\vec{p}_i\right]. \tag{3.47}$$

Під час руху кожної матеріальної точки змінюються $\vec{r}_i$ і $\vec{p}_i$. Продиференціювавши за часом обидві частини (3.47), дістанемо

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt},\vec{p}_i\right]+\left[\vec{r}_i,\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]. \tag{3.48}$$

Перший доданок у (3.48) дорівнює нулю, оскільки $\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{v}_i$ – швидкість матеріальної точки.

Отже,

$$\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt},\vec{p}_i\right]=\left[\vec{v}_i,m_i v_i\right]=0. \tag{3.49}$$

У другому доданку в (3.48) множник $\frac{d\vec{p}_i}{dt}$ згідно з другим законом Ньютона дорівнює сумі всіх внутрішніх і зовнішніх сил, прикладених до цієї точки, тобто

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n}\vec{f}_{ik}+\vec{F}_i,$$

де $\sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{f}_{ik}$ – сума всіх внутрішніх сил, які діють на *i*-ту матеріальну точку з боку інших точок системи; $\vec{F}_i$ – рівнодіюча всіх зовнішніх сил, прикладених до цієї точки. Тоді

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \left[\vec{r}_i \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{f}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] = \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{f}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right],$$

де $\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] = \vec{M}_i$ – момент зовнішніх сил відносно точки О; $\left[\vec{r}_i, \vec{f}_{ik}\right] = \vec{\mu}_{ik}$ – момент внутрішньої сили, яка діє на *i*-ту точку з боку *K* -ї точки. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{f}_{ik}\right] = \sum_{k=1}^{n} \vec{\mu}_{ik} = \vec{\mu}_{i1} + \vec{\mu}_{i2} + \cdots + \vec{\mu}_{in}$$

є сумою моментів внутрішніх сил $i \neq k$, які діють на *i*-ту точку з боку всіх інших.

Запишемо тепер вираз (3.48) для кожної *i*-ї точки у вигляді

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{\mu}_{ik} + \vec{M}_i. \tag{3.50}$$

Додавши одержані рівняння (3.50) для всіх матеріальних точок системи, дістанемо

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{L}_n}{dt} = \frac{d\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_n\right)}{dt} = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{\mu}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

або

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{\mu}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i, \tag{3.51}$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу системи.

Сума моментів усіх внутрішніх сил $\sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{n} \vec{\mu}_{ik} = 0$. Покажемо це на прикладі системи, яка складається з двох точок, (рис. 3.9), де

$$\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n} \vec{\mu}_{ik} = \vec{\mu}_{12} + \vec{\mu}_{21} = \left[\vec{r}_1, \vec{f}_{12}\right] + \left[\vec{r}_2, \vec{f}_{21}\right].$$

Оскільки згідно з третім законом Ньютона сили взаємодії однакові, тобто $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$, то вираз (3.51) можна подати у вигляді

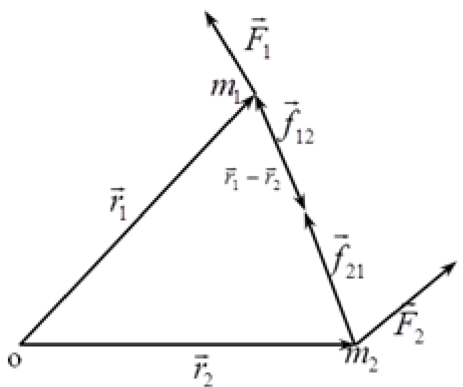

Рис. 3.9

$$\vec{\mu}_{12} + \vec{\mu}_{21} = \left[\vec{r}_1, \vec{f}_{12}\right] - \left[\vec{r}_2, \vec{f}_{21}\right] = \left[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{f}_{12}\right]$$

.

Вектори $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ та $\vec{f}_{12}$ колінеарні (рис. 2.І6), тому їх векторний добуток дорівнює нулю. Таким чином, $\vec{\mu}_{12} + \vec{\mu}_{21} = 0$.

Узагальнюючи на випадок n матеріальних точок, одержуємо $\sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{n} \vec{\mu}_{ik} = 0$.

Таким чином, права частина виразу (3.50) складатиметься лише із суми моментівзовнішніх сил, які діють на систему, тобто

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{\,зовн}. \tag{3.52}$$

Отже, <u>швидкість зміни моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно будь-якої точки O дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, які діють на дану систему.</u> Це рівняння називають законом зміни моменту імпульсу системи матеріальних точок.

Якщо в рівнянні моментів (3.52) права частина за будь-яких причин дорівнює нулю, тобто

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

то $\vec{L} = const$, <u>тобто момент імпульсу системи відносно точки залишається сталим, якщо сума моментів зовнішніх сил дорівнює нулю.</u>

Цей закон називають законом збереження моменту імпульсу системи. Він відіграє таку саму важливу роль, як і закони збереження енергії та імпульсу і є одним з найважливіших у фізиці.

Розглянемо, в яких випадках момент зовнішніх сил дорівнює нулю.

1. Якщо система матеріальних точок замкнена, тобто зовнішні сили відсутні або компенсуються.

2. Якщо в будь-який момент часу моменти сил відносно будь-якої .точки компенсуються.

3. Якщо всі зовнішні сили центральні, то моменти цих сил відносно центра дорівнюють нулю.

Приклади розв'язання задач

<u>Задача № 3.1</u>

Куля з масою m_1, яка рухається зі швидкістю v_1 , зазнає центральний пружний співудар з кулею масою m_2 , яка рухається назустріч зі швидкістю v_2. Визначіть швидкості u_1 та u_2 обох куль після співудару.

Розв'язок:

Нехай напрям швидкості v_1 – позитивний. Згідно з законом збереження енергії та імпульсу:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2};$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Напрямлена швидкість u_1 та u_2 поки невідомі. Тому ми їх берем зі знаком «+», так як реальні знаки будемо визначати пізніше.

Перепишемо обидва рівняння наступним чином:

$$\begin{aligned} m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2); \\ m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 + v_2). \end{aligned} \qquad (1)$$

Поділивши першу рівність на другу , отримаємо:

$$v_1 + u_1 = u_2 - v_2,$$

Помноживши результат ділення спочатку на m_1 потім на m_2. При цьому *отримаємо:*

$$m_1v_1 + m_1u_1 = m_1u_2 - m_1v_2;$$
$$m_2v_1 + m_2u_1 = m_2u_2 - m_2v_2.$$

Склавши кожне з цих рівностей з рівністю (1), визначимо

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$$
$$u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Якщо куля з масою m_2 рухається в тому ж напрямку, що і куля з масою m_1 (тобто куля m_1 наздоганяє кулю m_2), знак швидкості v_2 треба змінити на зворотній.

Зауважимо, якщо маси куль рівні, то після удару вони просто обміняються швидкостями. Так, якщо одна з них до удару була нерухома, то після удару нерухомою стане друга куля, а перша набуде імпульсу другої.

Корисно мати на увазі те, що знайдені вирази дозволяють знайти кінетичну енергію кожної з куль після співудару.

<u>Задача № 3.2</u>

Куля масою m_1, яка рухається зі швидкістю $\vec{v}_1$, зазнає пружний співудар з кулею такої ж самої маси, яка рухається зі швидкістю $\vec{v}_2$ під кутом α до напрямку швидкості $\vec{v}_1$. Швидкості куль після удару дорівнюють $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$. Знайти кут розльоту куль β (між напрямками швидкостей $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$).

Розв'язок:

Згідно до законів збереження енергії та імпульсу

$$\frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) = \frac{m}{2}(u_1^2 + u_2^2);$$
$$m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = m(\vec{u}_1 + \vec{u}_2).$$

З другого рівняння виходить, що діагональ векторного паралелограма, побудована на швидкостях $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ (до удару), дорівнює діагоналі векторного паралелограма, побудованого на швидкостях $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ (після удару). Тому *можна записати :*

$$v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(180^\circ - \alpha) = u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2\cos(180^\circ - \beta)\,;$$

Враховуючи перше рівняння збереження, згідно якому

$$v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

знаходимо, що

$$v_1v_2\cos(180^\circ - \alpha) = u_1u_2\cos(180^\circ - \beta)\,;$$

звідки:

$$\cos\beta = \frac{v_1v_2\cos\alpha}{u_1u_2}.$$

Задача № 3.3 Куля масою m попадає в балістичний маятник (підвішаний на нитці ящик з піском) з масою M і застрягає в ньому. При цьому маятник відхиляється відверті калі так, що підіймається на деяку висоту h. Визначити швидкість кулі в момент удару.

Розв'язок:

Згідно з законом збереження імпульсу

$$mv = (M + m)u\,, \qquad (1)$$

де u – початкова швидкість маятника, яку наближенно вважаємо горизонтальною.

Згідно закону збереження потенціальної енергії тіла, піднятого на висоту h, дорівнює $E_n = Mgh$. При вертикальному положені нитки вся ця енергія перетворюється в кінетичну: $E_k = \dfrac{Mv^2}{2}$.

Із рівності $(M + m)gh = \dfrac{(M + m)u^2}{2}$ визначимо u

$$u = \sqrt{2gh}\,. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) , отримаємо

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh}\,.$$

Запитання

1. Що таке робота та потужність?
2. Кінетична енергія. Теорема про кінетичну енергію.
3. Потенціальна енергія тіла в однорідному полі тяжіння.
4. Потенціальна енергія розтягнутої пружини.
5. Закон збереження повної механічної енергії.
6. Консервативні та не консервативні сили. Дати визначення.
7. Момент сили відносно точки.
8. Момент імпульса. Закон збереження момента імпульса.
9. Рівняння моментів.

Список літератури:

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. Навчальний посібник для студентів вищих тех. і пед. закладів освіти. Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик; За ред. І.М. Кучерука –К.:Техніка, 1999. –536с.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика / Д.В. Сивухин –М.: Наука, 1974. –519с.

3. Иродов И.Е. Механика. Основые законы / И.Е. Иродов – 6-е изд., испр. –М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. –309с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. / И.В. Савельев –М.: Наука, 1970. –508с.

Рекомендований до перегляду відеоматеріал:

5. https://www.youtube.com/watch?v=OY2ta2uldM4

6. https://www.youtube.com/watch?v=MVHlHRUEU9U

7. https://www.youtube.com/watch?v=sBe5D783BPI

8. https://www.youtube.com/watch?v=gGjNiS_S8Dc

Розділ 4. МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

У разі обертального руху тіла, усі його точки описують кола, центри яких розташовані на одній прямій, яку називають віссю обертання.

Слід зауважити, що тіло розглядається як абсолютно тверде, тобто усі матеріальні точки тіла під час руху не змінюють взаємного розташування. Зрозуміло, що уявлення про абсолютно тверде тіло – це наближена модель, яка тим точніше змальовує реальну ситуацію, чим менше деформується тіло.

Розглянемо обертання твердого тіла відносно осі, яка має фіксований напрям у просторі. Щоб утримати вісь від переміщень, її затискають, наприклад, у підшипники. Якщо вісь обертання нерухома, то усі точки твердого тіла рухаються по колах, розташованих у перпендикулярних до осі обертання площинах (рис. 4.1). Обертаються навколо нерухомої осі ротори турбін, електричних генераторів, колінчастих валів двигунів внутрішнього згоряння тощо.

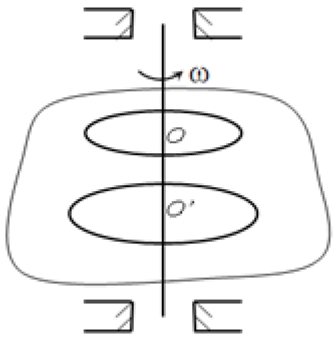

Рис. 4.1

Відомо, що рух точки по колу може бути описаний як лінійними характеристиками з лінійною швидкістю $\vec{v}$, лінійним прискоренням $\vec{a}$, дуговою координатою S, так і кутовими: кутом повороту φ, кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ та кутовим прискоренням $\vec{\beta}$.

Лінійні кінематичні характеристики залежать від відстані до осі обертання, тому вони не можуть бути характеристиками обертального руху всього тіла. Кутові характеристики однакові для всіх точок тіла і можуть бути використані для опису його обертального руху.

4.1. Момент сили відносно осі обертання

Розглядаючи обертальний рух, введемо поняття моменту сили відносно осі обертання. Припустимо, що під дією сили $\vec{F}$, прикладеною в точці *A*, тіло обертається навколо нерухомої осі z (рис. 4.2). Момент сили $\vec{F}$ відносно будь-якої точки O, яка лежить на осі обертання $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із точки O в точку прикладення сили $\vec{F}$.

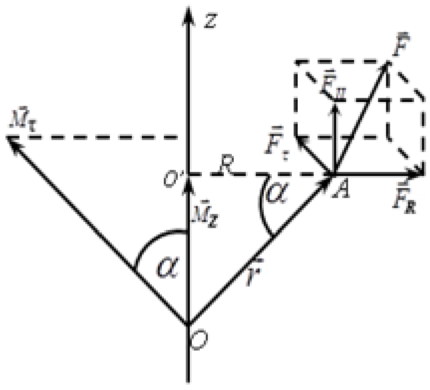

Рис. 4.2

Розглянемо складову моменту M паралельну осі z:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z, \tag{4.1}$$

яку називають моментом сили відносно осі z.

Якщо лінія дії сили перетинає вісь або паралельна їй, то момент сили відносно цієї осі дорівнює нулю. Силу $\vec{F}$ зручно розкласти на три взаємно перпендикулярні складові: $\vec{F}_{II}$, яка паралельна осі z, $\vec{F}_R$, яка перпендикулярна до осі z, складова, спрямована вздовж прямої, яка проходить через вісь і точку прикладання сили; $\vec{F}_\tau$, яка перпендикулярна до площини, проведеної через вісь і точку прикладання сили. Якщо уявити коло радіуса R з центром O' на осі z, то складова $\vec{F}_\tau$ буде напрямлена за дотичною до цього кола. Таким чином,

$$\vec{F} = \vec{F}_{II} + \vec{F}_\tau + \vec{F}_R.$$

Момент сили відносно осі z

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}_{II} + \vec{F}_\tau + \vec{F}_R\right]_z = \left[\vec{r}, \vec{F}_{II}\right]_z + \left[\vec{r}, \vec{F}_R\right]_z + \left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right]_z.$$

У цьому виразі перша складова дорівнює нулю, оскільки векторний добуток $\left[\vec{r}, \vec{F}_{II}\right]$ дає вектор, перпендикулярний до осі z. Тому $\left[\vec{r}, \vec{F}_{II}\right]_z = 0$. Друга складова $\left[\vec{r}, \vec{F}_R\right]$ також дає вектор, перпендикулярний до осі z, тому $\left[\vec{r}, \vec{F}_R\right]_z = 0$. Таким чином,

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right]_z.$$

Векторний добуток позначимо $\left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right] = M_\tau$. Він визначає момент сили $\vec{F}_\tau$, відносно точки O'. Вектор M_τ утворює з віссю z кут α.

Проекція M_τ на вісь z

$$M_\tau = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z = \left(M_\tau\right)_z = M_\tau \cos\alpha .$$

Ураховуючи, що $\cos\alpha = \dfrac{R}{r}$, а вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}_\tau$ взаємно перпендикулярні, дістаємо

$$M_\tau = rF_\tau \frac{R}{r} = F_\tau R \qquad .(4.2)$$

4.2. Основне рівняння динаміки обертального руху

Встановимо закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі z (рис. 4.3). Умовно поділяємо тіло на елементи масою m_i, кожний з яких можна взяти за матеріальну точку. Нехай число цих елементів n. Усі матеріальні точки рухаються в площинах, перпендикулярних до осі обертання, по колах з центрами, які лежать на осі z. За допомогою радіуса-вектора $\vec{r}_i$ характеризуємо положення кожного елемента масою m_i відносно деякої точки O на осі обертання. За визначенням момент імпульсу матеріальної точки масою m_i відносно точки O

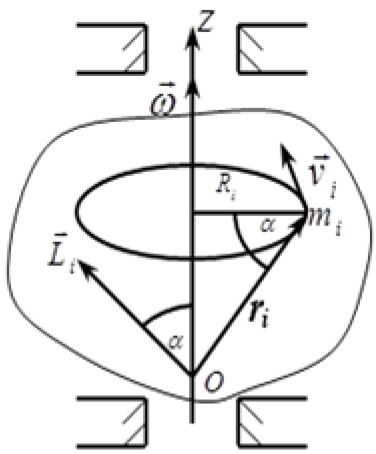

Рис. 4.3

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, m_i, \vec{v}_i\right] = m_i \left[\vec{r}_i, \vec{v}_i\right]. \qquad (4.3)$$

Ураховуючи, що вектори $\vec{r}_i$ та $\vec{v}_i$ взаємно перпендикулярні і $v_i = \omega R_i$, модуль вектора $\vec{L}$

$$\vec{L}_i = r_i m_i v_i = m_i r_i \omega R_i . \qquad (4.4)$$

Вектор $\vec{L}_i$, напрямлений перпендикулярно до площини векторів $\vec{r}_i$ та $\vec{v}_i$ і складає кут α з віссю z.

Проекцію вектора $\vec{L}_i$ на вісь обертання називають <u>моментом імпульсу</u>

матеріальної точки відносно осі обертання:

$$L_{iz} = L_i \cos\alpha = m_i r_i \omega R_i \cos\alpha = m_i \omega R_i^2,$$

оскільки $r_i \cos\alpha = R_i$.

Якщо вираз (4.4) записати для кожної маси m_i та підсумувати за всіма частинками, то $L_z = \sum L_{iz}$ визначить момент імпульсу тіла відносно осі обертання z:

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i R_i^2 \omega = \omega \sum m_i R_i^2 . \qquad (4.5)$$

Величину, яка дорівнює сумі добутків елементарних мас m_i та квадратам їх відстаней від осі, називають моментом інерції тіла відносно даної осі:

$$J_Z = \sum m_i R_i^2 . \qquad (4.6)$$

Використовуючи це позначення, співвідношення (4.5) можна записати у вигляді

$$L_Z = J_Z \omega \qquad (4.7)$$

Таким чином, <u>момент імпульсу тіла відносно осі обертання є добутком моменту інерції цього тіла відносно тієї самої осі обертання та кутової швидкості.</u>

Оскільки тверде тіло розглядається як система матеріальних точок то до нього можна застосувати закон зміни моменту імпульсу системи (3.52):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{зовн}, \qquad (4.8)$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу тіла; $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{зовн}$ – векторна сума моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, відносно деякої точки системи або початку інерціальної системи відліку, або центра мас.

Проектуючи всі величини, які входять до складу рівняння (4.8), на вісь обертання, одержуємо

$$\frac{d}{dt} L_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i_z}^{зовн} .$$

Таким чином, похідна за часом від моменту імпульсу тіла відносно осі обертання z дорівнює сумі моментів зовнішніх сил відносно цієї осі.

Ураховуючи, що $L_Z = J_Z \omega$, закон зміни моменту імпульсу тіла (4.8) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(J_z \omega\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i_z}^{зовн} . \tag{4.9}$$

Якщо, момент інерції $J_z = const$, то (4.9) набуде вигляду

$$J_Z \beta_Z = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i_z}^{зовн} , \tag{4.10}$$

де $\beta_z = \frac{d\omega}{dt}$ – проекція кутового прискорення на вісь z. Тут розглядається обертання навколо нерухомої осі, тому вектор $\vec{\omega}$ змінюється тільки за величиною.

Рівняння (4.9) та (4.10) є <u>основним законом динаміки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі z</u>. Причому тверде тіло може мати будь-яку форму з довільним розподілом маси. Із рівняння (4.10) випливає, що кутове прискорення

$$\beta_Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{зовн}}{J} . \tag{4.11}$$

Із (4.10) випливає також, що момент інерції твердого тіла відносно будь-якої нерухомої осі є мірою інертності цього тіла в разі його обертання навколо цієї осі. Це подібно до того, як маса тіла з мірою інертності тіла в разі поступального руху. Чим більший момент інерції тіла, тим менше кутове прискорення, якого тіло набуває під дією одного й того самого моменту зовнішніх сил. Момент інерції тіла залежить від розподілу маси відносно осі обертання. Наприклад, циліндричне тіло великого діаметра, яке обертається навколо осі, матиме більший момент інерції, ніж циліндр тієї самої маси, але меншого діаметра.

4.3. Закон збереження моменту імпульсу тіла, яке обертається

Досі розглядали тіла з постійним моментом інерції J. Тепер припустимо, що момент інерції J змінюється в процесі руху. Тоді основний закон динаміки тіла, яке обертається (4.9), має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(J_z\omega\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{i_z}^{зовн}. \qquad (4.12)$$

Коли під час обертання тіла навколо нерухомої осі сумарний момент зовнішніх сил відносно цієї осі $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i^{зовн}=0$, то момент імпульсу тіла відносно осі обертання не змінюється з часом:

$$J_Z\omega=const. \qquad (4.13)$$

Це рівняння є законом збереження моменту імпульсу для обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Припустимо, що під час обертання тіла за умови $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{i_z}^{зовн}=0$ змінюється розподіл мас під дією внутрішніх або зовнішніх сил, тобто змінюється момент інерції J_Z. Відповідно збільшуватиметься або зменшуватиметься кутова швидкість обертання. Наприклад, нехай момент інерції тіла в деякому стані дорівнює J_1, а кутова швидкість обертання ω_1, Після того, як у системі відбулися зміни, момент інерції став дорівнювати J_2, а кутова, швидкість – ω_2, то згідно із законом збереження моменту імпульсу

$$J_1\omega_1=J_2\omega_2. \qquad (4.\ 13^1)$$

За допомогою закону збереження моменту імпульсу можна з'ясувати деякі явища. Наприклад, фігурист має порівняно невелику кутову швидкість обертання, коли його руки розведені в сторони. Притискаючи руки до тулуба, фігурист зменшує свій момент інерції; при цьому кутова швидкість його обертання помітно зростає. Унаслідок багатьох причин (у результаті вулканічної діяльності, утворення гір, випадання опадів та ін.) змінюється момент інерції Землі. Це приводить до зміни кутової швидкості її обертання навколо своєї осі, а в результаті - коливання тривалості доби.

4.4. Момент інерції тіла. Теорема Гюйгенса - Штейнера

Момент інерції тіла $J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ було виведено під час розгляду обертального руху твердого тіла. Але він притаманний не лише тілу, яке обертається. Кожне тіло має момент інерції незалежно від того, обертається воно чи перебуває в стані спокою. Найменше значення моменту інерції має тіло тоді, коли вісь обертання проходить через його центр мас. Моменти інерції відносно осей, які проходять через центр мас, називають <u>головними моментами інерції.</u>

Розрахуємо моменти інерції в деяких випадках безперервного розподілу маси за об'ємом.

Для суцільного тіла формула $J = \sum m_i r_i^2$ є наближеною. Якщо тіло розбивається на безліч дуже малих елементів dm, їх додавання зводиться до операції інтегрування:

$$J = \int r^2 dm.$$

Розподіл маси за об'ємом характеризується густиною

$$\rho = \frac{dm}{dv},$$

звідки випливає, що $dm = \rho dv$.

У загальному випадку ρ може змінюватись в об'єкт тіла, тобто $\rho = \rho(r)$.

Таким чином, знаходження моменту інерції тіла зводиться до розрахунку інтегралу

$$J = \int \rho(r) r^2 dv.$$

<u>1. Розрахуємо момент інерції суцільного диску масою m і радіуса R</u>

відносно осі z, яка проходить через центр диску (рис. 4.4). Розіб'ємо диск на

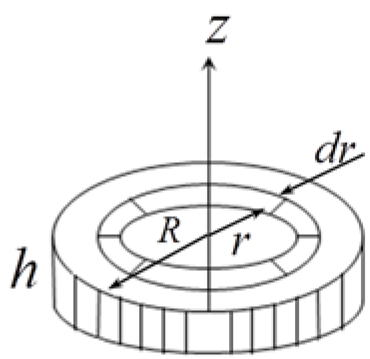

Рис. 4.4

кільця шириною dr. Об'єм такого шару

$$dv = 2\pi rhdr,$$

де h – товщина шару.

Тоді маса шару

$$dm = \rho dv = \rho 2\pi rhdr.$$

Оскільки густина в усіх точках однакова і ρ можна винести з-під інтегралу, дістаємо

$$J = \rho \int r^2 2\pi rhdr = \rho 2\pi h \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\rho \pi h R^4}{2}.$$

Якщо взяти до уваги, що маса диска $m = \rho \pi h R^2$, то формулу для моменту інерції J можна переписати у вигляді

$$J = \frac{mR^2}{2}. \tag{4.14}$$

Формула (4.14) визначає момент інерції диска відносно осі яка проходить через центр мас.

2. Обчислимо момент інерції стержня масою m і довжиною l відносно осі, яка проходить через його центр мас (рис. 4.5). Розіб'ємо стержень на малі

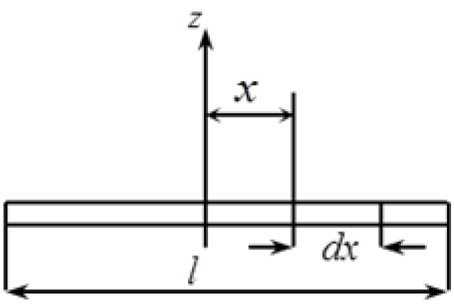

Рис. 4.5

елементи dm, розташовані від центра масс на відстані x. Об'єм кожного такого елемента $dv = dx \cdot S$, де S – площа перерізу; маса $dm = \rho dv = \rho S dx$.

Момент інерції цілого стержня

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dm = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S l^3.$$

Маса стержня $m = \rho S l$. Тоді J_0 – момент інерції відносно центра мас,

$$J_0 = \frac{1}{12} m l^2.$$

3. Нехай вісь обертання z стержня проходить через один із кінців стержня (рис. 4.6):

$$J_z = \int_0^l x^2 dm = \rho S \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3},$$

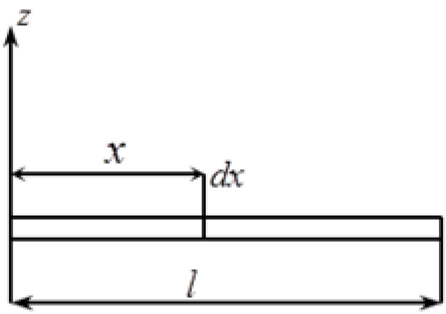

Рис. 4.6

тобто $J_z = \dfrac{ml^2}{3}$.

Таким чином, якщо вісь обертання переноситься так, що відстань від осі обертання r_i збільшується, то й момент інерції збільшується. Розрахунок моментів інерції тіл складної форми є досить складною задачею і яка частково полегшується в разі використання для таких розрахунків теореми Гюйгенса - Штейнера про паралельні осі: якщо відомо момент інерції J_0 тіла масою m відносно осі, яка проходить через центр мас цього тіла, то момент інерції відносно іншої осі, яка паралельна першій і відстоїть від неї на відстані a,

$$J_z = J_0 + ma^2. \tag{4.15}$$

Для доведення теореми Гюйгенса - Штейнера розглянемо тіло довільної форми (рис. 4.7). Візьмемо дві паралельні осі, одна з яких проходить через центр мас тіла O, інша – через точку O'. Осі перпендикулярні до площини рисунка. Розташуємо систему координат x, y, z так, щоб її початок перебував в центрі мас тіла O, а вісь z збігалася з віссю O. Систему координат x', y', z' розташуємо так,

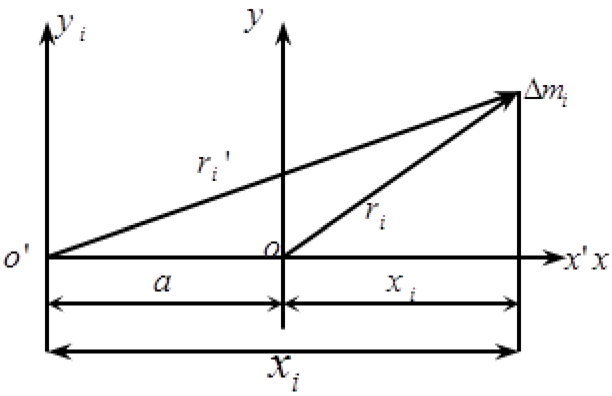

Рис. 4.7

щоб вісь z' збігалася а віссю O', а початок координат розташуємо так, щоб осі x і x' збігалися. Координати матеріальної точки Δm_i, в обох координатних системах відповідно (x_i, y_i) та $(a + x_i, y_i)$.

Момент інерції тіла відносно осі O

$$J_0 = \sum \Delta m_i r_i^2 = \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right).$$

Момент інерції відносно осі O'

$$\begin{aligned} J_z &= \sum \Delta m_i r_i'^2 = \sum \left[((a + x_i)^2 + y_i)^2 \right] \Delta m_i = \\ &= \sum \Delta m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) + a^2 \sum \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i . \end{aligned} \tag{4.15'}$$

Оскільки початок координат системи x, y, z збігається з центром мас тіла, то координата центра мас x_C дорівнює нулю і тоді третій доданок у виразі (4.15′) зникає. Отже, вираз (4.15) набуває вигляду

$$J_z = J_0 + a^2 \sum \Delta m_i$$

або

$$J_z = J_0 + ma^2 ,$$

де

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i .$$

3.5. Поняття про тензор інерції

Якщо буде закріплено не вісь, навколо якої обертається тіло, а лише одна його точка, то рух тіла ускладнюється. У кожну хвилину такий рух є обертовим відносно осі, яка проходить через точку закріплення.

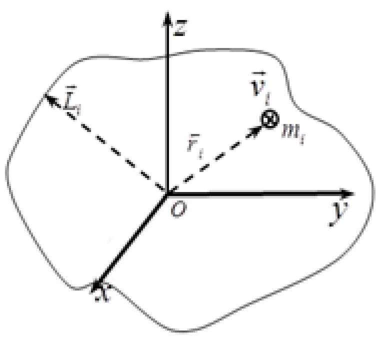

Рис. 4.8

1. Розглянемо тверде тіло, закріплене в центрі мас O, де перебуває початок системи координат x, y, z. Тверде тіло розглядатимемо як сукупність матеріальних точок масами m_i (рис. 4.8). Момент імпульсу будь-якої матеріальної точки відносно O

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i , \vec{p}_i \right] = \left[\vec{r}_i , m_i \vec{v}_i \right]. \tag{4.16}$$

Нехай ω – миттєва кутова швидкість тіла. Тоді швидкість i-ї точки

$\vec{v}_i = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right]$. Таким чином, момент імпульсу матеріальної точки

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, m_i\left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right]\right]. \tag{4.17}$$

Скористаємося правилом розкладення подвійного векторного добутку

$$\left[\vec{A}\left[\vec{B}\vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A}\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\vec{B}\right)$$

і запишемо співвідношення (4.17) у вигляді

$$\vec{L}_i = m_i\left\{\vec{\omega}_i \vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i\left(\vec{r}_i, \vec{\omega}_i\right)\right\}. \tag{4.18}$$

Момент імпульсу тіла відносно точки O

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum m_i\left\{\vec{\omega}_i \vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i\left(\vec{r}_i, \vec{\omega}_i\right)\right\}. \tag{4.19}$$

Звідси випливає, що вектор моменту імпульсу $\vec{L}$ у загальному випадку не збігається з напрямом вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$. Знайдемо зв'язок між компонентами цих векторів.

Ураховуючи, що

$$r_{ix} = x_i;\ r_{iy} = y_i;\ r_{iz} = z_i;$$

$$\left(r_i, \vec{\omega}\right) = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z,$$

векторне співвідношення (4.19) запишемо у вигляді проекцій на координатні осі:

$$\begin{aligned} L_x &= \sum m_i\left\{\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\omega_x - x_i\left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right)\right\} = \\ &= \sum m_i\left\{\left(y_i^2 + z_i^2\right)\omega_x - x_i\left(y_i\omega_y + z_i\omega_z\right)\right\} = \\ &= \omega_x\sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) - \omega_y\sum m_i x_i y_i - \omega_z\sum m_i x_i z_i. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Так само можна одержати й проекції моменту імпульсу на осі y і z:

$$L_y = \omega_y\sum m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) - \omega_x\sum m_i x_i y_i - \omega_z\sum m_i y_i z_i; \tag{4.21}$$

$$L_z = \omega_z\sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) - \omega_x\sum m_i x_i z_i - \omega_y\sum m_i z_i y_i. \tag{4.22}$$

Коефіцієнти при проекціях кутової швидкості ω_x, ω_y і ω_z мають одиницю

$кг \cdot м^2$ і залежать від розподілу мас у тілі та миттєвої орієнтації тіла відносно координатних осей x, y, z.

Уведемо позначення:

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right);$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right); \qquad (4.23)$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right),$$

де J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – моменти інерції відносно відповідних координатних осей, які називають осьовими моментами інерції. Інші коефіцієнти пропорційності між L і ω називають відцентровими моментами інерції і позначають так:

$$J_{xy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = J_{yx};$$

$$J_{xz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = J_{zx}; \qquad (4.24)$$

$$J_{yz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = J_{zy}.$$

Відцентрові моменти інерції є характеристиками динамічної неврівноваженості тіл. Наприклад, у процесі обертання відносно осі z сили тиску на підшипники, в яких закріплено вісь, залежать від значень J_{xz} та J_{yz}. Таким чином, співвідношення (4.20) – (4.22) можна записати у вигляді

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z;$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z; \qquad (4.25)$$

$$L_x = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$

Отже, для тіла довільної форми з довільним розподілом маси вектори $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$ не колінеарні. Взаємна орієнтація векторів $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$ визначається значеннями коефіцієнтів пропорційності між ними. Якщо, наприклад, $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = J$, а всі відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тобто $J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0$, то співвідношення (4.25) набудуть вигляду

$$L_x = J\omega_x; L_y = J\omega_y; L_z = J\omega_z. \qquad (4.26)$$

Отже, вектори $\vec{L}$ та $\vec{\omega}$ у цьому разі колінеарні.

Тепер припустимо, що вектор $\vec{\omega}$ напрямлений уздовж осі z, тобто $\vec{\omega}_z \neq 0$ і $\vec{\omega}_x = \vec{\omega}_y = 0$. Нехай коефіцієнти $J_{xz} \neq 0$, $J_{yz} \neq 0$ та $J_{zz} \neq 0$. Підставивши ці значення в (4.25), одержимо

$$L_x = J_{xz}\omega_x \neq 0;\ L_y = J_{yz}\omega_y \neq 0;\ L_z = J_{zz}\omega_z \neq 0,$$

тобто всі три компоненти вектора $\vec{L}$, не дорівнюють нулю. Отже, вектор $\vec{L}$ утворює з вектором $\vec{\omega}$, напрямленим уздовж осі z деякий кут.

Сукупність дев'яти величин, які задаються співвідношеннями (4.23) та (4.24):

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{xx} \end{pmatrix}, \qquad (4.27)$$

називають тензором інерції*. Тензор інерції J_{zz} характеризує інертні властивості тіла в процесі обертання. Величини J_{xx}, J_{yy} і J_{zz} є діагональними елементами тензора, а інші – недіагональними. Якщо величини, які розміщені симетрично відносно діагоналі, дорівнюють $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, то такий тензор називають симетричним. У разі безперервного розподілу маси додавання в (4.23) і (4.24) переходить в інтегрування. Наприклад, компонента J_{xx}

---

*Тензором називають упорядковану сукупність дев'яти величин, які називають компонентами тензора. Компоненти тензора залежать від вибору системи координат і в разі повороту координатних осей змінюються як добутки компонентів двох векторів.

$$J_{xx} = \int \rho(xyz)\left(y^2 + z^2\right)dv,$$

$\rho = \rho(x, y, z)$ – густина; dv – об’єм Як приклад розрахуємо компоненти тензора інерції для однорідного прямокутного паралелепіпеда розмірами маси dm. $2a \times 2b \times 2c$ (рис. 4.9).

Нехай початок координат збігається з центром інерції C, а координатні осі паралельні ребрам паралелепіпеду і проходять через їх середини.

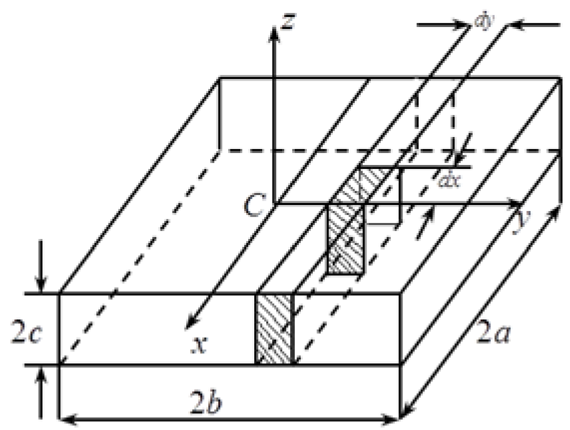

Рис. 4.9

Обчислимо момент інерції $J_{zz} = \int \rho\left(x^2 + y^2\right)dv$. Розіб'ємо тіло на стовпчики, які в основі мають площу, що дорівнює $dxdy$. Усі елементи такого стовпчика мають однакові * значення координат x і y. Об'єм стовпчика $dv = 2cdxdy$, а його масса $dm = \rho 2cdxdy$.

Тому внесок моменту інерції стовпчика в J_{zz} визначається виразом

$$dJ_{zz\text{стовп}} = \rho 2cdxdy\left(x^2 + y^2\right).$$

Проінтегрувавши цей вираз за x, знайдемо внесок, який дає прошарок довжиною $2a$, висотою $2c$ та товщиною dy:

$$dJ_{zz\text{шар}} = \int_{-a}^{a} 2\rho c\left(x^2 + y^2\right)dxdy = 2\rho c\int_{-a}^{a}\left(x^2 + y^2\right)dx \cdot dy =$$

$$= 2\rho cdy\left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_{-a}^{a} = \left(\frac{4}{3}\rho ca^3 + 4\rho cay^2\right)\cdot dy$$

Нарешті, про інтегрувавши за y, одержимо момент інерції для всього тіла:

$$J_{zz}=\int_{-b}^{b}\left(\frac{4}{3}\rho ca^3+4\rho cay^2\right)dy=$$
$$=\frac{4}{3}\rho ca^3\int_{-b}^{b}dy+4\rho ca\int_{-b}^{b}y^2dy=$$
$$=\frac{1}{3}\rho(2a)(2b)(2c)\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{3}m\left(a^2+b^2\right).$$

Відповідні розрахунки дають значення J_{xx} та J_{yy}:

$$J_{xx}=\frac{1}{3}m\left(b^2+c^2\right);$$

$$J_{yy}=\frac{1}{3}m\left(a^2+b^2\right).$$

Розрахуємо тепер один із відцентрових моментів інерції, який згідно з (4.24)

$$J_{xy}=-\int\rho xydv.$$

Внесок моменту інерції стовпчика з основою $dxdy$

$$dJ_{xy_{стовп}}=-y2c\rho dxdyx,$$

а внесок шару

$$dJ_{xy_{шар}}=-2\rho c\int_{-a}^{a}xydxdy=-2\rho cydy\,|_{-a}^{a}=-2\rho cydy\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=0.$$

Відповідно момент інерції всього тіла дорівнює нулю: $J_{xy}=0$. Аналогічний результат одержуємо також для інших відцентрових моментів. Таким чином, у разі відповідного вибору координатних осей тензор моменту інерції значно спрощується і в ньому залишаються лише три діагональних елементи:

$$J_{xx}=J_x;\ J_{yy}=J_y;\ J_{zz}=J_z.$$

$$J=\begin{pmatrix}J_x & 0 & 0\\ 0 & J_y & 0\\ 0 & 0 & J_z\end{pmatrix}. \qquad (4.28)$$

Отже, тензор (4.28) має діагональний вигляд. Величини J_z, J_y, J_z називають головними моментами інерції, а коодинатні осі – головними осями інерції. Головні осі інерції перетинаються в центрі мас і їх напрями можна визначити із загальних міркувань симетрії: у випадку циліндра це будуть вісь циліндра і перпендикулярні до неї дві взаємно перпендикулярні осі; для кулі – це будь-які три взаємно перпендикулярні осі.

Нехай тіло обертається навколо однієї із своїх головних осей інерції, наприклад навколо осі z: $\omega = \omega_z$; $\omega_x = \omega_y = 0$. Тоді згідно з (4.25)

$$L_x = L_y = 0;\ L_z = J_z \omega .$$

Отже, вектор $\vec{L}$ збігається з напрямом $\vec{\omega}$.

Такий самий результат одержуємо тоді, коли тіло обертається навколо інших головних осей. В усіх цих випадках

$$\vec{L} = J\vec{\omega},$$

де J – головний момент інерції тіла.

Таким чином, характер обертального руху твердого тіла залежить від розташування осей обертання відносно головних осей тензора інерції.

Якщо вісь обертання збігається з головною віссю тензора інерції, то момент імпульсу збігається з напрямом кутової швидкості $\vec{\omega}$. Коли тіло рухається, вісь обертання збігається э напрямом моменту імпульсу. Отже, вісь обертання зберігає свій напрям. При цьому всі відценторві сили зрівноважені і якщо тіло закріплено на такій осі, то на опори не діють додаткові сили, які виникають при його обертанні. Тому такі осі називають вільними.

Якщо вектор $\vec{\omega}$ не збігається з жодною із головних осей інерції, то він не збігається також з нерухомим у просторі вектором $\vec{L}$; отже, напрям осі обертання весь час змінюється.

Дослідження стійкості руху тіла з $J_1 > J_2 > J_3$ показує, що найбільш стійким є обертання відносно такої вільної осі, для якої момент інерції J має максимальне значения $J = J_1$. Обертання навколо осі з мінімальним значениям

$J = J_3$ є сталим лише за відсутності збурюючих сил. Обертання навколо осі з $J = J_2$ нестійке. Наприклад, тонкий стержень, підвішений одним кінцем до нитки, в разі швидкого обертання розміщується горизонтально і буде обертатися навколо осі, перпендикулярної до стержня, який проходить через його центр мас (рис. 4.10). Властивості вільних осей широко застосовують у техніці. В усіх пристроях з частинами, які швидко обертаються, дуже важливо, щоб обертання проходило навколо вільної осі, інакше виникають величезні сили, які діють з боку обертаючої частини на вісь, а відповідно і на підшипники машин. Оскільки навіть у разі найретельнішого виготовлення обертаючих деталай неможливо досягги, щоб їх центр мас точно потрапляв на вісь обертання (яка задається підшипниками), то використовують гнучкі або самоцентруючі вали. Якщо вал не дуже твердий, а його вісь розташована поблизу вільної осі ротора машини, то в разі досить великої швидкості обертання вал згинається так, що обертання рухомої частини встановлюється навколо вільної осі ротора.

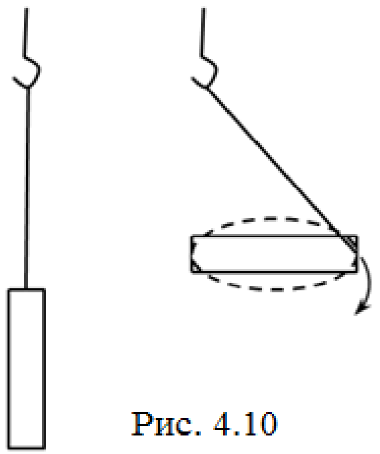

Рис. 4.10

4.6. Гіроскоп і гіроскопічний ефект

Гіроскопом називають симетричне тіло, яке обертається навколо своєї осі, що є однією з вільних осей. Найпростіший гіроскоп – це дитяча іграшка – вовчок. Якщо вовчок розкрутити і залишити, то він зберігає напрям своєї осі обертання. Це явище можна пояснити, виходячи із закону $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{зовн}$. Оскільки під час обертання вовчка момент сили тяжіння відносно центра мас дорівнює нулю, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, то $\vec{L} = const$, тобто момент імпульсу $\vec{L}$ зберігає свою величину і напрям за відсутності зовнішніх моментів сил. Цю властивість вовчка широко використовують у різних технічних, зокрема навігаційних, пристроях. Схему типового гіроскопа зображено на рис. 4.11. Його складовими частинами є важке тіло обертання D, вісь обертання CC' та карданів підвіс. Останній складається з двох кілець: зовнішнього, яке вільно обертається навколо осі, що проходить через вістря AA' і внутрішнього, яке обертається навколо осі, яка перпендикулярна до неї та проходить через вістря BB'. Вісь CC' диску D опирається на внутрішнє кільце карданового підвісу, що забезпечує їй можливість вільно обертатись у просторі в будь-яких напрямах.

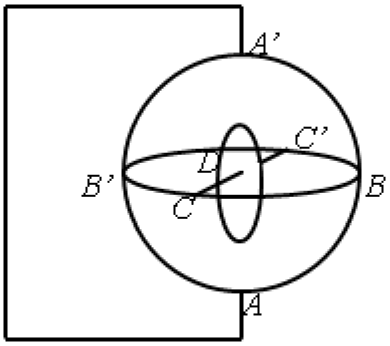

Рис. 4.11

Вісь симетрії є однією з головних осей інерції гіроскопа. У разі обертання навколо цієї осі момент імпульсу гіроскопа збігається за напрямом з віссю обертання. Тому таке обертання стійке і вісь обертання зберігає незмінним свій напрям у разі будь-якого зміщення підставки чи іншого пересування приладу.

Для зміни напряму осі гіроскопа відносно нерухомої системи координат необхідно, щоб на нього діяв момент зовнішніх сил. У такому разі спостерігається явище, яке називають гіроскопічним ефектом.

Розглянемо цей ефект на прикладі гіроскопа, схему якого зображено на рис. 4.12. Надамо гіроскопу обертання у вертикальній площині, а вісь розташуємо горизонтально. Момент імпульсу $\vec{L} = J\vec{\omega}$ дуже малий і напрямлений уздовж осі вовчка. Підвісимо на вісь деяке тіло масою m. Оскільки момент сили $\vec{M}$ і колінеарний йому вектор приросту моменту імпульсу $d\vec{L}$ розташовані в горизонтальній площині, то гіроскоп обертатиметься в горизонтальній площині навколо вертикальної осі. У разі нового положення осі вовчка

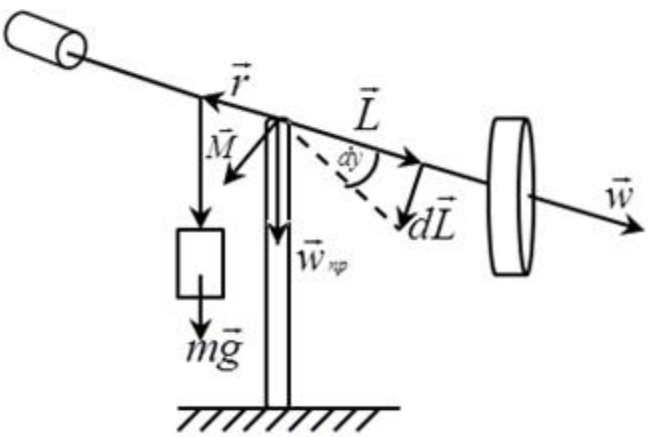

Рис. 4.12

момент сили знову буде перпендикулярним до неї. Тому вісь вовчка знову повернеться і т.ін. Рух, який виникне, називають прецесійним. Вісь прецесії (вертикальна вісь) паралельна напрямку зовнішньої сили.

Прецесійний рух має цікаву властивість: він практично безінерційний. Прецесія миттєво зупиняється, як тільки зникає mg (відключається дія моменту сили $\vec{M}$). Це пов'язано з тим, що момент зовнішніх сил створює кутове прискорення осі гіроскопа. Коли $\vec{M}$ стає таким, що дорівнює нулю, то кутове прискорення також дорівнює нулю. При цьому вектор кутової швидкості перестає змінювати свій напрям і вісь вовчка не буде повертатися.

Розглянемо рух гіроскопа в тому випадку, коли його вісь закріплено в точці O, яка не збігається з центром мас (рис. 4.13). При цьому гіроскоп весь час перебуває під дією сили тяжіння, момент якої напрямлений перпендикулярно до осі гіроскопа. У результаті вісь гіроскопа обертатиметься навколо вертикальної осі, яка проходить через нерухому точку O, описуючи конус. Припустимо, що момент імпульсу вовчка напрямлений уздовж його осі, що справджується при $\omega >> \omega_{пр}$. Сила тяжіння mg створює момент, напрям якого перпендикулярний до вертикальної площини, що проходить через вісь вовчка. Визначимо кутову швидкість прецесії $\omega_{пр}$ ($OC = L\sin\theta$; $\dfrac{dL}{L\sin\theta} = tgd\varphi \approx d\varphi$) для малих кутів:

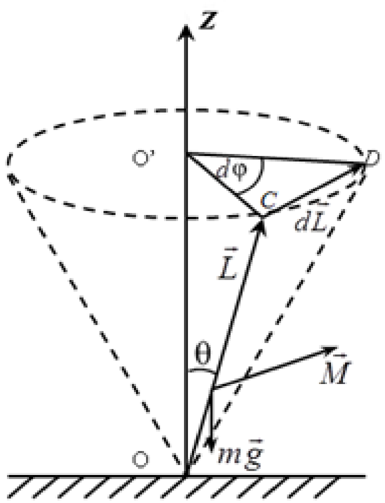

Рис. 4.13

$$\omega_{пр} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{dtL\sin\theta} = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgr\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{J\omega}. \qquad (4.29)$$

Кутова швидкість прецесії не залежить від кута нахилу вовчка. Чим більша кутова швидкість обертання ω, тим менша швидкість прецесії.

Гіроскопи широко застосовують у приладах, які зазначають напрям або автоматично ліквідують відхилення від заданого напряму (автопілоти).

4.7. Кінетична енергія тіла, яке обертається

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо деякої нерухомої осі z. Кінетична енергія тіла, яке обертається, є алгебраїчною сумою кінетичних енергій окремих матеріальних точок, з яких складається це тіло:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Оскільки лінійна швидкість кожної матеріальної точки

$$v_i = \omega r_i,$$

де r_i – відстань точки масою m_i від осі z, то

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega = \frac{J\omega^2}{2},$$

де $J = \sum m_i r_i^2$ – момент інерції тіла відносно осі z.

Таким чином, кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (4.30)$$

Щоб надати тілу кінетичну енергію, потрібно виконати деяку роботу. Припустимо, що на матеріальну точку тіла масою m_i діють сили зовнішня $\vec{F}$ і внутрішня f. За час dt ці сили виконують роботу

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} + \vec{f} d\vec{r} = F_\tau dr + f_\tau dr,$$

де $\vec{F}_\tau$ – проекція зовнішньої сили на напрям переміщення $d\vec{r}$; $\vec{f}$ – проекція внутрішньої сили на $d\vec{r}$.

Для нескінчено малих проміжків часу $|d\vec{r}| \to dS$, де dS – довжина дуги, $dS = rd\varphi$. Таким чином,

$$\delta A_i = \left(F_\tau + f_\tau\right) rd\varphi = F_\tau rd\varphi + f_\tau rd\varphi.$$

Оскільки F_τ збігається з $d\vec{r} \perp \vec{r}$, то Fr – момент зовнішньої сили відносно осі z: $M_{iz}^{зовн} = F_\tau r$. Аналогічно момент внутрішньої сили відносно осі z

$$f_\tau r = \mu_{iz} .$$

Отже,

$$\delta A_i = \left(M_{iz}^{зовн} + \mu_{iz}\right) d\varphi . \qquad (4.31)$$

Елементарна робота, яка виконується при повороті тіла на кут $d\varphi$,

$$\delta A = \sum \delta A_i = \sum M_{iz}^{зовн} d\varphi = M_z^{зовн} d\varphi , \qquad (4.32)$$

де $M_z = M_{iz}^{зовн}$ – сумарний момент усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла,тоді як сума моментів внутрішніх сил дорівнює нулю, тобто $\sum \mu_{iz} = 0$.

Ураховуючи співвідношення (4.11), дістаємо

$$M_{iz}^{зовн} = J \frac{d\omega}{dt} ; \; d\varphi = \omega dt .$$

Тоді робота

$$\delta A = J \frac{d\omega}{dt} \omega dt .$$

Інтегруючи це співвідношення, дістаємо, що робота, яка виконується зовнішньою силою,

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \delta A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} . \qquad (4.33)$$

Таким чином, згідно із законом збереження енергії робота зовнішніх сил дорівнює зміні кінетичної енергії тіла.

Приклади розв'язання задач

Задача № 4.1. Диск з масою m та радіусом R сидить на одному валу зі шківом радіусом r. До шківу по дотичній прикладена постійна сила F. Визначити, через скільки часу після початку обертання маховик досягне швидкості ω.

Розв'язок:

Під дією постійного моменту $M = Fr$ диск обертається *рівноприскоренно. Кут повороту* $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ *кутова швидкість* $\omega = \varepsilon t$ *тоді:*

$$\varphi = \frac{\omega\, t}{2}.$$

Робота, яка виконана при обертанні,

$$A = M\,\varphi = F\,r\,\frac{\omega t}{2}.$$

При цьому енергія, яка надбана диском:

$$W_K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{4}.$$

Звідки:

$$t = \frac{mR^2\omega}{2F\,r}.$$

Задача № 4.2. Маховик радіусом R*, маса* M *якого рівномірно розподілена по ободу, обертається з кутовою швидкістю* ω *(рис.4) . В деякий момент часу до ободу с силою* F *притискається тормозна колодка, причому коефіцієнт тертя між ободом та колодкою дорівнює* k*. Знайти час гальмування і число оборотів маховика до зупинки.*

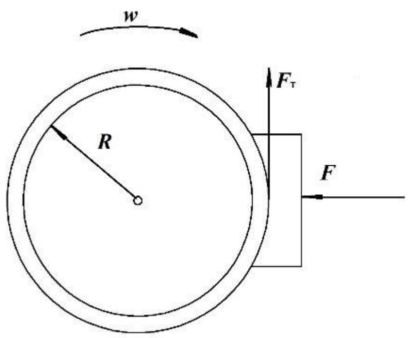

рис.4

Розв'язок:

Маховик рухається рівносповільнено під дією сили тертя колодки. Для точки на ободі можна записати:

$$v_t = v_0 - at,$$

де v_t *– лінійна швидкість точки.*

Прискорення a *викликано силою тертя:*

$$F_{mp} = kF = Ma.$$

З цих формул, а також враховуючи, що $v_t = \omega R$ *знаходимо:*

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{\omega RM}{kF}.$$

За час t *число обертів точки маховика становить:*

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\omega t - \frac{\varepsilon t^2}{2}),$$

де ε *– дотична кутового прискорення точки, яке в даному випадку дорівнює* $\frac{\omega}{t}$

звідки:

$$n = \frac{1}{2\pi}(\omega t - \frac{\varepsilon t^2}{2}) = \frac{\omega t}{4\pi} = \frac{\omega^2 RM}{4\pi kF}.$$

Задача № 4.3. З наклонної площини під кутом α скочуються без ковзання куля, диск та обруч. Одночасно по тій же площині зісковзує без тертя деяке тіло. Визначити лінійне прискорення центрів мас всіх тіл. Початкова швидкість дорівнює нулю.

Розв'язок:

Якщо тіло здійснює поступальний і обертальний рух одночасно, то його кінетична енергія:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

де m *– маса тіла;* v *– лінійна швидкість центра тяжкості тіла; J – момент інерції;* ω *– кутова швидкість обертання.*

На початку руху тіло мало потенціальну енергію:

$$U = mgh,$$

причому

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Звідси

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + J/R^2}}.$$

Так як висота наклонної площини $h = l\sin\alpha$ *і* $\omega = v/R$.

Всі тіла рухаються рівноприскоренно вниз по площині, так що:

$$l = \frac{at^2}{2} \text{ і } v = at.$$

Враховуючи ці формули, отримаємо:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + J/R^2}.$$

Моменти інерції:

$$\text{Кулі:} \quad J_{куля} = \frac{2}{5}mR^2;$$

$$\text{Диска:} \quad J_{диск} = \frac{mR^2}{2};$$

$$\text{Обруча:} \quad J_{обруч} = mR^2.$$

Для тіла яке зісковзує $J = 0$*, отже ,*

$$a = g\sin\alpha.$$

Запитання:

1. Момент сили відносно осі обертання.
2. Момент імпульсу матеріальної точки відносно осі обертання.
3. Момент імпульсу тіла відносно осі обертання.
4. Основне рівняння динаміки обертального руху.
5. Закон збереження моменту імпульсу тіла, яке обертається.
6. Момент інерції тіла.
7. Теорема Гюйгенса – Штейнера.
8. Що таке тензор інерції? Його вигляд.
9. Що таке гіроскоп? Його будова.
10. Що таке гіроскопічний ефект?

11. Кінетична енергія тіла, яке обертається.

12. Зв'язок роботи зовнішніх сил з кінетичною енергією тіла.

Список літератури:

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. Навчальний посібник для студентів вищих тех. і пед. закладів освіти. Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик; За ред. І.М. Кучерука –К.:Техніка, 1999. –536с.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика / Д.В. Сивухин –М.: Наука, 1974. –519с.

3. Иродов И.Е. Механика. Основые законы / И.Е. Иродов – 6-е изд., испр. –М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. –309с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. / И.В. Савельев –М.: Наука, 1970. –508с.

Рекомендований до перегляду відеоматеріал:

5. https://www.youtube.com/watch?v=WWQbGPPHy9k

6. https://www.youtube.com/watch?v=GtkYbzdLuhc

7. https://www.youtube.com/watch?v=sO40xrfg6XU

Розділ 5. РУХ ТІЛ У НЕІНЕРЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ВІДЛІКУ

5.1. Перетворення Галілея

До цього часу, щоб описати рух матеріальної точки або тіла (сукупності матеріальних точок), користувались інерціальними системами відліку. У подібних системах відліку тіла, на які не діють зовнішні сили, зберігають швидкість сталою за величиною і напрямом.

Розглянемо інерціальну систему відліку $K(x, y, z)$ і $K'(x', y', z')$, яка рухається поступально відносно K із сталою швидкістю v_0 вздовж осі x. Розглянемо рух матеріальної точки M відносно двох систем відліку.

Положення точки M відносно нерухомої системи координат K визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, а відносно рухомої системи K' – радіусом-вектором $\vec{r}\,'$. Якщо в момент часу $t=0$ зазначені координатні системи збігаються, то в момент часу t вони розійдуться на величину $r_0 = v_0 t$ (рис. 5.1). Таким чином,

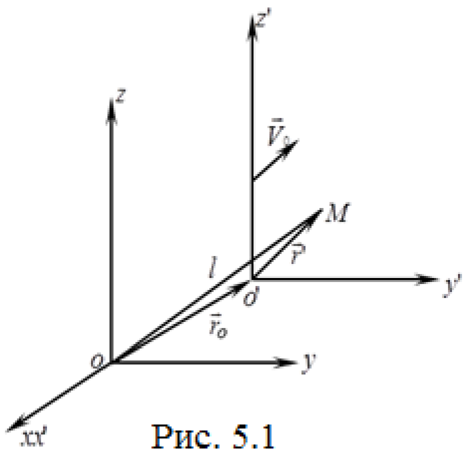

Рис. 5.1

$$\begin{aligned} &\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t; \\ &x = x' + v_0 t'; \; y = y'; \; z = z'. \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Скористаємося прийнятим у класичній механіці припущенням, що час в обох системах відліку плине однаково, тобто $t = t'$. Додамо це рівняння до формул (5.1) й одержимо

$$x = x' + v_0 t'; \; y = y'; \; z = z'; \; t = t'. \qquad (5.1^1)$$

Сукупність цих чотирьох рівнянь називають перетвореннями Галілея. Продиференціювавши (5.1^1) за часом, одержимо закон перетворення швидкості матеріальної точки в разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої:

$$v_x = v'_x + v_0; \; v_y = v'_y; \; v_z = v'_z$$

або

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0. \qquad (5.2)$$

Цей вираз є <u>законом додавання швидкостей у класичній механіці</u>.

Диференціал від (5.2) за часом з урахуванням, що $v_0 = const$, дає

$$\vec{a} = \vec{a}\,'. \qquad (5.3)$$

Оскільки система відліку K інерціальна, тобто $\vec{a} = 0$ (за відсутності дії сил), то із співвідношення (5.3) випливає, що $\vec{a}\,' = 0$, а це означає, що й система відліку K' також виявляється інерціальною. Таким чином, усі системи відліку, які рухаються відносно будь-якої інерціальної системи прямолінійно та рівномірно, є інерціальними.

Припустимо, що в системі координат K на тіло масою m діє деяка сила

$\vec{F}$, під впливом якої тіло рухається з прискоренням $\vec{a}$. За другим законом Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{5.4}$$

У будь-якій інерціальній системі координат K'

$$m'\vec{a}' = \vec{F}'. \tag{5.5}$$

Оскільки в класичній механіці маса тіла стала в будь-якій системі координат $m = m'$ і $\vec{a} = \vec{a}'$ згідно з (5.3), то й $\vec{F} = \vec{F}'$. Отже, рівняння (5.5) повністю еквівалентне рівнянню (5.4), записаному в іншій інерціальній системі відліку. Фізичні величини, або фізичні закони, які не змінюються в разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої, називають інваріантними.

Співвідношення (5.3) – (5.5) показують, що рівняння другого закону Ньютона, яке лежить в основі класичної механіки, інваріантне відносно перетворень Галілея. Цей висновок є виразом механічного принципу відносності Галілея: у будь-яких інерціальних системах відліку всі механічні явища за тих самих умов відбуваються однакова. Інакше кажучи, рівномірний прямолінійний рух замкненої системи не впливає на протікання в ній будь-яких механічних явищ. Механічний принцип відносності означає, що в межах класичної механіки всі інерціальні системи відліку цілком рівнозначні

5.2. Неінерціальні системи, які рухаються поступально

Системи відліку, які рухаються з прискоренням відносно інерціальних систем відліку, називають неінерціальними.

У неінерціальних системах відліку закони Ньютона не виконуються. Виявляється, що прискорення матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку не задовольняє другому закону Ньютона, тобто матеріальна точка може рухатися прискорено в неінерціальній системі відліку, якщо на неї не діють сили з боку інших тіл. Так, у разі раптового гальмування автобуса пасажири починають прискорено відхилятися в напрямі руху. Коли автобус рухається по криволінійній траєкторії, пасажири відхиляються в бік, протилежний до центра кривизни. В усіх цих і багатьох подібних прикладах тіла набувають прискорення в неінерціальних системах, якщо на них не діють інші тіла.

Знайдемо рівняння руху в неінерціальній системі відліку. Розглянемо дві системи координат: нерухому (інерціальну) систему K та систему K', яка рухається відносно K з прискоренням. Припустимо, що в момент часу t матеріальна точка M, яка рухається, має швидкість $\vec{v}'(t)$ відносно системи K'. При цьому швидкість системи K' відносно системи K дорівнює $v_0(t)$. Тоді згідно з (5.2) швидкість матеріальної точки відносно системи K

$$\vec{v}(t)=\vec{v}'(t)+\vec{v}_0(t). \qquad (5.6)$$

Продиференціюємо за часом (4.6):

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d\vec{v}'(t)}{dt}+\frac{d\vec{v}_0(t)}{dt} \qquad (5.7)$$

або прискорення матеріальної точки відносно системи K

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0, \qquad (5.8)$$

де $\vec{a}'$ – прискорення матеріальної точки відносно системи K'; $\vec{a}_0$ – прискорення, якого набуває система K'.

Помножимо на масу m обидві частини виразу (5.8):

$$m\vec{a}=m\vec{a}'+m\vec{a}_0. \qquad (5.8^1)$$

Згідно з другим законом Ньютона в інерціальній системі відліку

$$m\vec{a}=\vec{F}, \qquad (4.9)$$

де $\vec{F}$ – результуюча всіх сил, які діють на дану матеріальну точку з боку інших тіл.

Оскільки $\vec{a}'$ – прискорення точки в неінерціальній системі відвіку, то $m\vec{a}'=\vec{F}'$ буде силою, яка діє на матеріальну точку в неінерціальній системі відліку. Тоді вираз (5.8^1) набуває вигляду

$$\vec{F} = \vec{F}' + m\vec{a}_0. \quad (5.10)$$

Отже, рівняння руху тіла в неінерціальній системі відліку набуває вигляду

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (5.11)$$

Таким чином, в неінерціальних системах відліку до сил $\vec{F}$, зумовлених дією інших тіл, додається величина – $m\vec{a}_0$, яка має розмірність сили. Її можна формально вважати деякою силою, яка діє на матеріальну точку в рухомій системі відліку. Цю величину називають силою інерції: $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$. Після того, як введено поняття про силу інерції, (5.11) можна записати так:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i. \quad (5.12)$$

Отже, рівняння руху (5.9) матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку та рівняння її руху (5.12) відносно неінерціальної системи подібні за формою. Відмінність між ними полягає лише в тому, що в неінерціальних системах відліку крім "звичайних" сил $\vec{F}$, викликаних дією одного тіла на інше, необхідно враховувати додаткові сили інерції $\vec{F}_i$.

Введення сил інерції дає змогу описувати рух матеріальної точки в неінерціальній системі подібними рівняннями, що і в інерціальній системі відліку.

В існуванні сил інерції пересвідчуємося, перебуваючи пасажирами транспорту. Під час різкого гальмування або ривку вперед ми відчуваємо силу, яка спонукає нас відхилятися вперед або назад. На відміну від "звичайних" сил $\vec{F}$ для сил інерції неможливо зазначити тіло, з боку якого вони діють. Сили інерції виникають не в результаті взаємодії тіл, а внаслідок прискореного руху системи.

Оскільки будь-який рух завжди можна розглядати відносно інерціальної системи відліку, то немає принципової необхідності вводити сили інерції.

У той самий час користування силами інерції часто спрощує розв'язання ряду задач в неінерціальних системах відліку порівняно з розв'язанням цих задач в інерціальних.

Розглянемо приклад. До стелі вагона підвішена кулька. Під час прискореного руху вагона кулька відхиляється від вертикального положення на деякий кут φ. Розглянемо рух кульки в інерціальній і неінерціальній системах відліку. Спостерігач, який перебуває в інерціальній системі відліку, наприклад на платформі, стверджує, що коли вагон починає рухатися прискорено, кулька намагається зберігати свій попередній стан і відставатиме від вагона, відхиляючись на деякий кут. Нитка відхилятиметься доти, доки рівнодіюча сил тяжіння $\vec{P}$ і натягу нитки $\vec{T}$ не досягне (рис. 5.2, а)

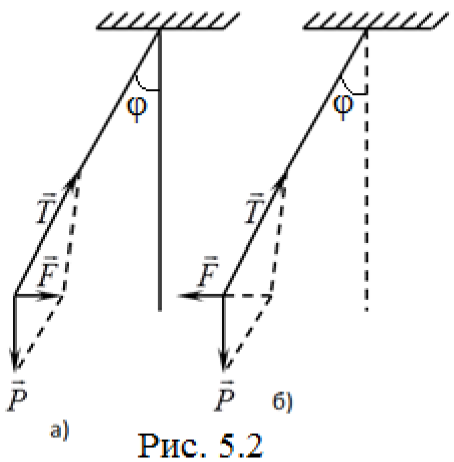

Рис. 5.2

$$\vec{F} = m\vec{a}_0 = \vec{P} + \vec{T},$$

де a_0 – прискорення руху вагону.

Спостерігач, який перебуває в неінерціальній системі відліку – вагоні, стверджує, що відхилена кулька відносно вагона перебуває в стані спокою (рис. 5.2, б).

Якщо нитка відхиляється від вертикалі, то рівнодіюча сил тяжіння $\vec{P}$ та натягу нитки $\vec{T}$ не дорівнює нулю. Оскільки кулька перебуває в стані спокою, то ця рівнодіюча сила зрівноважується деякою силою $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$. Таким чином,

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_i = 0. \tag{5.13}$$

5.3. Відцентрова сила інерції

Нехай система відліку здійснює обертальний рух зі сталою кутовою швидкістю ω. Як приклад такої системи відліку може бути диск, який обертається навколо вертикальної осі (рис. 5.3). Разом із диском обертається насаджена на тонкий стержень кулька, з'єднана з центром диска пружиною.

Розглянемо рух кульки в інерціальній і неінерціальній системах відліку. Спостерігач в інерціальній системі відліку робить висновок, що на кульку з боку пружини діє сила пружності, яка забезпечує рух кульки по колу радіуса r з доцентровим прискоренням

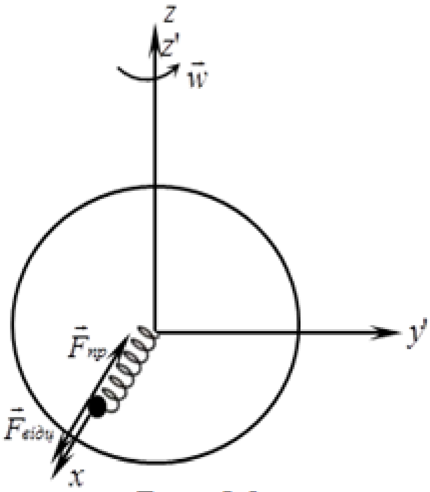

Рис. 5.3

$$F_{пр} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r\,. \qquad (5.14)$$

Спостерігач, який перебуває в рухомій системі, робить висновок, що оскільки кулька відносно нього перебуває в стані спокою, то на неї діє сила, напрямлена по радіусу від центра, яка зрівноважується силою пружності розглядуваної пружини. Цю силу називають <u>відцентровою силою інерції:</u>

$$\vec{F}_{відц} = -\vec{F}_{пр} = -m\omega^2 \vec{r}\,, \qquad (5.15)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від центра диска до кульки.

Відцентрова сила інерції завжди напрямлена вздовж радіуса від центра. Відцентрова сила інерції діє на тіло незалежно від того, перебуває воно у стані спокою або рухається відносно системи, яка обертається. Відцентрова сила залежить не лише від маси тіла, а й від його відстані від центра обертання системи.

Під вплив відцентрової сили інерції потрапляють пасажири транспорту, який рухається по криволінійній траєкторії; пілоти, які виконують фігури вищого пілотажу.

Відцентрові сили можуть досягати великих значень у центрифугах. Дію відцентрових сил інерції широко використовують у техніці (відцентрові насоси, сепаратори, центрифуги).

Відцентрова сила інерції діє на тіла на поверхні Землі, оскільки система, пов'язана із Землею, є неінерціальною.

Головною причиною неінерціальності цієї системи є добове обертання

Землі.

Розглянемо тіло массою m, розташоване на відстані R від земної осі: $R = R_З \cos\varphi$ (рис. 5.4), де φ – широта точок земної поверхні. Сила тяжіння, яка діє на тіло, напрямлена вздовж радіуса $R_З$ до центра Землі:

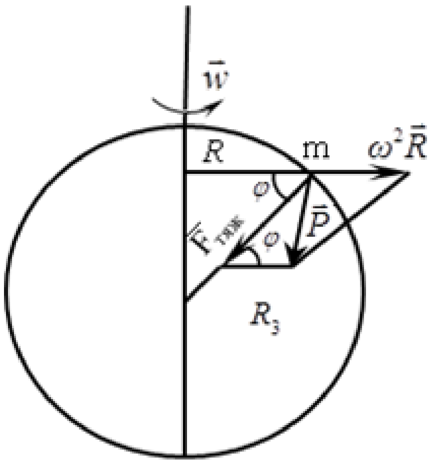

Рис. 5.4

$$F_{тяж} = \gamma \frac{mM}{R_З^2} = mg_0, \tag{5.16}$$

де g_0 – прискорення, якого набуває тіло під дією сили тяжіння.

У системі відліку, пов'язаній із Землею, на тіло також діятиме відцентрова сила інерції: $\vec{F}_{відц} = m\omega^2\vec{R}$.

Векторна сума цих сил визначає силу тяжіння, тобто

$$\vec{P} = \vec{F}_{відц} + \vec{F}_{тяж}. \tag{5.17}$$

На полюсах Землі $\vec{F}_{відц} = 0$ і, як наслідок, $\vec{P} = \vec{F}_{тяж}$. На екваторі різниця $\vec{P} - \vec{F}_{тяж} = m\omega^2 R_З$ досягає максимального значення, що становить, 0,3% $\vec{F}_{тяж}$. Якщо тіло вільно падає, воно одержить прискорення $\vec{g}_\varphi$ та $\vec{P} = m\vec{g}_\varphi$. Вираз (5.17) можна записати у вигляді

$$m\vec{g}_\varphi = m\vec{g}_0 + m\vec{a}_{відц}.$$

Отже, прискорення вільного падіння, яке спостерігається на широті φ,

$$g_\varphi = -\vec{g}_0 + \omega^2\vec{R}.$$

Таким чином, прискорення вільного падіння не напрямлене до центра Землі і не дорівнює тому прискоренню g_0, яке б мало тіло, якщо б Земля не оберталася. Найбільша відмінність між g_φ і g_0 спостерігається на екваторі:

$$g_\varphi - g_0 = R_З\omega^2 = 0{,}034\, м/с^2.$$

5.4. Сила Коріоліса

Розглянемо випадок, коли тіло рухається відносно системи відліку, яка обертається. Проведемо такий дослід. На горизонтальному диску накреслимо радіальну пряму OA . Пустимо в напрямі від O до A, кульку зі швидкістю v_0. Якщо диск не обертається, то кулька котитиметься вздовж прямої OA. Якщо ж диск почне обертатися, то кулька котитиметься по кривій лінії OB (рис. 5.5). При цьому напрям вектора швидкості кульки змінюватиметься. Спостерігач, який перебуває в рухомій системі відліку, пояснює викривлення траєкторії руху кульки дією сили інерції, яка є перпендикулярною до напряму швидкості. Цю силу інерції називають силою Коріоліса: $\vec{F}_K = -2m\left[\vec{\omega}\vec{v}_0\right]$.

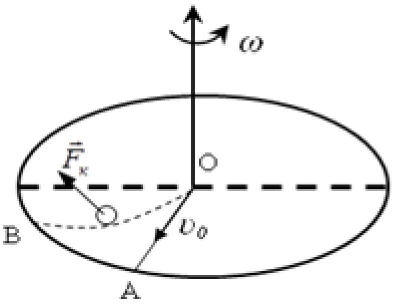

Рис 5.5

Сила Коріоліса, діє лише на тіло, яке рухається відносно системи відліку, що обертається, тобто коли $v_0 \neq 0$. Вона залежить від швидкості його руху і не залежить від положення тіла. Ця сила завжди перпендикулярна до швидкості тіла v_0 в системі, яка обертається.

Оскільки $F_K \perp \vec{v}_0$, тобто перпендикулярна до напряму переміщення, то вона роботи не виконує, лише відхиляє тіло, яке рухається, не змінюючи його швидкості. Дією сили Коріоліса можна пояснити багато явищ на поверхні Землі. Сили Коріоліса, діючи на тіло, яке рухається в північній півкулі, намагаються зсунути його вправо. Через це в північній півкулі праві береги річок більше розмиті, ніж ліві (рис. 5.6). Сили Коріоліса примушують відхилятися повітряні течії в атмосфері та водні течії в океанах. Ці сили викликають зміну площини коливань маятника (дослід Фуко).

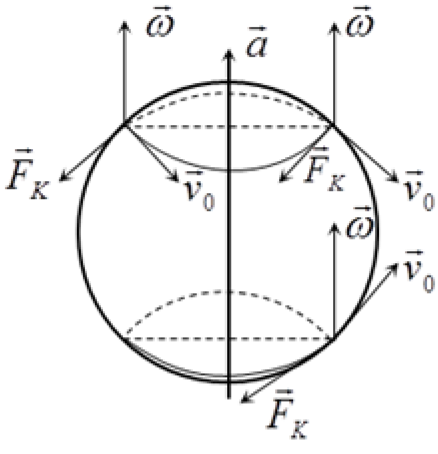
Рис. 5.6

Запитання:

1. Що таке перетвореннями Галілея?
2. Закон додавання швидкостей.
3. Що називають інваріантними величинами?
4. Механічний принцип відносності Галілея.
5. Що таке неінерціальні системи відліку?
6. Рівняння руху в неінерціальній системі відліку.
7. Відмінність руху матеріальної точки відносно інерціальної та неінерціальної системи відліку.
8. Відцентрова сила інерції. Від чого вона залежить?
9. Що називають силою Коріоліса?
10. Вираз для сили Коріоліса.
11. Від чого залежить сила Коріоліса?
12. Приклади дії сили Коріоліса.

Список літератури:

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. Навчальний посібник для студентів вищих тех. і пед. закладів освіти. Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик; За ред. І.М. Кучерука –К.:Техніка, 1999. –536с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика / Д.В. Сивухин –М.: Наука, 1974. –519с.
3. Иродов И.Е. Механика. Основые законы / И.Е. Иродов – 6-е изд., испр. –М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. –309с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. / И.В. Савельев –М.: Наука, 1970. –508с.

Рекомендований до перегляду відеоматеріал:

5. https://www.youtube.com/watch?v=-FHQTyZ_zW4
6. https://www.youtube.com/watch?v=psPxoilUeJo

Розділ 6. ЕЛЕМЕНТИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ МЕХАНІКИ

6.1. Основні положення спеціальної теорії відносності

Згідно з принципом відносності класичної механіки всі її закони інваріантні до перетворень Галілея. Із розвитком інших розділів фізики, зокрема оптики та електродинаміки, виникло питання: чи поширюється принцип відносності і на немеханічні явища. У кінці XIX ст. Максвел створив систему рівнянь, яка описує електричні та магнітні явища. Рівняння Максвела, як показали розрахунки, не були інваріантними до перетворень Галілея. Це означало, що оптичні й електричні явища нібито відбуватьюся по-різному в різних інерціальних системах відліку. Для подолання кризи, яка виникла в фізиці на початку XX ст. німецький вчений Ейнштейн запропонував нову теорію, яка отримала назву спеціальна теорія відностності (або релятівістська теорія) (1905р.). Теорія Ейнштейна базувалась на двох постулатах, або принципах: Перший постулат визначав принцип відносності, який є узагальненням механічного принципу відносності Галілея на будь-які процеси. Він формулюється так: відносно інерційних систем відліку всі фізичні явища (механічні, електромагнітні та ін.) за одних умов протікають однаково.

Другий постулат стверджує, що швидкість світла у вакуумі однакова відносно інерціальних систем відліку і не залежить від напряму його поширення та руху джерела або приймача.

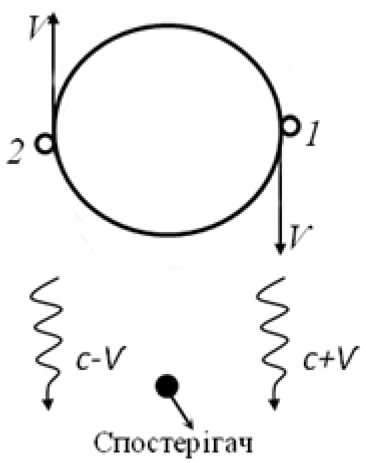

Рис. 6.1

Другий постулат показує, що швидкість світла у вакуумі є інваріантною величиною.

На користь того, що швидкість руху світла не залежить від швидкості джерела, свідчать деякі астрономічні спостереження, наприклад спостереження за подвійними зірками (рис.6.1). Це дві зірки, які обертаються відносно загального центра мас. Такі системи зустрічаються часто – майже половина зірок у нашій Галактиці подвійні. Швидкість орбітального руху подвійних зірок досить велика: $v \approx 3 \cdot 10^4 \, м/с$. Спостерігач, який знаходиться на Землі, бачить цю систему спочатку як подвійну зірку, потім як одиноку, коли одна з них заходить за іншу. У таких випадках маємо джерела світла, які рухаються або до нас, або віддаляються (рис. 6.1). Якщо б справджувався класичний закон додавання швидкостей, то світло, яке випромінюється зірками *1* та *2*, проходить відстань до Землі з різними швидкостями: $C_1 = C + v$ та $C_2 = C - v$ означає, що світловий сигнал від зірки *1* випереджатиме сигнал від зірки *2*. Через половину періоду, коли зірки внаслідок руху обміняються місцями, світловий сигнал від зірки *1* сприйматиметься з запізненим. Спостерігач, який знаходиться на Землі, відзначив би різницю в часі надходження світла від зірок *1* і *2*. Проте така різниця в часі не спостерігалася. Таким чином особливості поведінки подвійних зірок, а також інші експериментальні дані є свідченням того, що світло завжди поширюється з однією й тією самою швидкістю незалежно від руху джерела та приймача.

6.2 Перетворення Лоренца

Згідно з постулатами теорії відносності зв'язок між координатами та часом у двох інерціальних системах відліку K і K' визначається не перетвореннями Галілея, а більш складними перетвореннями Лоренца.

Розглянемо ці перетворення. Вважатимемо, що в момент часу $t = t' = 0$ координаті системи K і K' збігаються (рис 6.2).

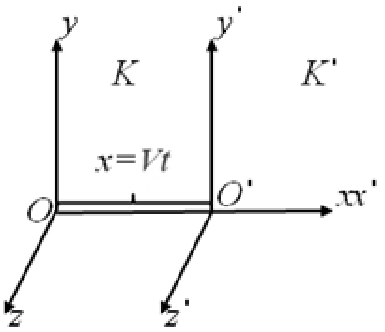

Рис. 6.2

Вважатимемо, що система координат K' рухається вправо вздовж осі x зі сталою швидкістю v. Оскільки відносний рух проходить уздовж осі x, то із міркувань симетрії випливає, що $y = y'$; $z = z'$. Розглянемо, як перетворюються координата x і час t. Точка O' - початок координатної системи

K', тобто

$$x' = 0. \tag{6.1}$$

Координата цієї точки, у нерухомій системі координат K, у момент часу t, відрахований у нерухомій системі координат $x = vt$. Цей вираз перепишемо у вигляді

$$x - vt = 0. \tag{6.2}$$

Порівнюючи (6.1) і (6.2), відзначаємо, що в одній і тій самій точці простору дорівнюють нулю величини x' (у системі K') і $x - vt$ (у системі K). У цьому зв'язку доцільно зробити припущення, що x' та $x - vt$ для будь-якого моменту часу відрізняються лише сталим множником γ, оскільки простір однорідний:

$$x' = \gamma\left(x - vt\right). \tag{6.3}$$

Тепер розглянемо точку O, яка відповідає початку координат нерухомої системи O: її координата у цій системі

$$x = 0. \tag{6.4}$$

У рухомій системі ця сама точка в момент часу t' має координату $x' = -vt'$. Тоді для цієї точки запишемо

$$x' + vt' = 0. \tag{5.5}$$

Порівнюючи рівняння (6.5) та (6.4), яке характеризує цю саму точку в іншій координатній системі, припустімо, як і раніше в (6.3), що

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right). \tag{6.6}$$

Беручи до уваги еквівалентність обох інерціальних систем, можна показати, що коефіцієнти пропорційності в рівняннях (6.3) і (6.6) мають бути однаковими. Визначимо цей коефіцієнт γ. Для цього використаємо той факт, що швидкість світла в обох системах має одне й те саме значення C.

Припустимо, що в момент $t = t' = 0$ із точок O і O' які збігаються, випромінюється світловий сигнал. Протягом часу t цей сигнал досягне деякої точки з координатою

$$x = Ct. \tag{6.7}$$

У системі K' координата цієї точки

$$x' = Ct' \tag{6.8}$$

Вирази (6.7) і (6.8) підставимо в формули (6.3) і (6.6):

$$x' = Ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(Ct - vt) = \gamma(C - v)t\,; \tag{6.9}$$

$$x = Ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(Ct' + vt') = \gamma(C + v)t'; \tag{6.10}$$

Визначимо t із рівняння (6.10) і підставимо в (6.9):

$$ct' = \frac{1}{c}\gamma^2(c+v)(c-v)t'.$$

звідси

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.11}$$

Підставляючи (6.11) у співвідношення (6.3) і (6.6), одержуємо формули перетворення для координат x і x':

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.12}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.13}$$

Тепер знайдемо вирази перетворення для часу t і t'.

Скористаємося перетвореннями (6.3) і (6.6) для x і x' й обчислимо їх відносно t і t':

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma\left(\gamma(x - vt) + vt'\right) = \gamma^2 x - \gamma^2 vt - \gamma vt'\,;$$

$$\gamma vt' = x + \gamma^2 vt - \gamma^2 x = x\left(1 - \gamma^2\right) + \gamma^2 vt\,;$$

$$t' = \gamma t + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}x = \gamma\left(t + \frac{1-\gamma}{\gamma^2 v}x\right);$$

$$t' = \gamma\left(t + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{x}{v}\right) = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

Підставивши в останнє рівняння вираз (6.11), одержимо

$$t' = \frac{t - {v}/{c^2}\, x}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}. \quad (6.14)$$

Аналогічно можна одержати відповідні формули для перетворення часу з системи K' в систему

$$t = \frac{t' - {v}/{c^2}\, x'}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}. \quad (6.15)$$

Таким чином, доведено, що формули перетворення для переходу із системи K' у систему K мають вигляд

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}};\ y = y';\ z = z';\ t = \frac{t' + {v}/{c^2}\, x'}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \quad (6.16)$$

Зворотний перехід із системи K у систему K' описується формула

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}};\ \ y = y';\ \ z = z';\ \ t' = \frac{t - {v}/{c^2}\, x}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \quad (6.17)$$

Рівняння (6.16) і (6.17) називається перетвореннями Лоренца.

Неважко зрозуміти, що коли $v << c$, перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея. Отже, перетворення Галілея справджуються в разі руху із швидкістю, малою порівняно із швидкістю світла. При $v > c$ вирази (6.16) і (6.17) будуть уявними. Це означає, що рух зі швидкістю, яка перевищує швидкість світла в вакуумі, неможливий.

6.3. Наслідки з перетворень Лоренца. Відносність одночасності подій у різних системах відліку

Розглянемо, як залежать від часу та простору події в різних інерціальних системах відліку.

У класичній механіці часові співвідношення між різними подіями в просторі не залежать від того, в якій системі відліку вони розглядаються. Це означає, що коли будь-які дві події відбуваються одночасно в одній системі відліку, то вони є одночасними також в інших інерціальних системах. Взагалі тривалість однієї й тієї самої події вважається в класичній фізиці однаковою для всіх систем відліку.

Спеціальна теорія відносності приводить до висновку, що час не є абсолютним і його перебіг залежить від системи відліку K і K'. Система K' рухається відносно K вправо вздовж осі x з швидкістю v (рис. 6.3). Нехай у системі K' деякий стержень перебуває у стані спокою. У середині стержня в точці O міститься ліхтарик, а на кінцях, у точках A і B – фотоелементи.

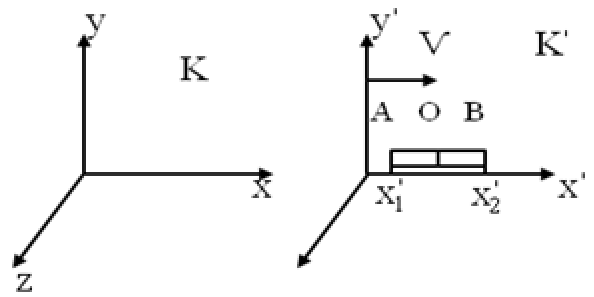

Рис. 6.3

Координата точки A в системі K' дорівнює x'_1, а точки B – x'_2. Нехай у деякий момент ліхтарик O дав короткочасний спалах світла. З точки зору спостерігача, який знаходиться в рухомій системі K' світлові імпульси досягнуть рівновіддалених від точки O фотоелементів A і B в один і той самий момент часу $t'_1 = t'_2 = t'$ (або $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$), оскільки швидкість поширення світла в обох напрямах однакова й дорівнює c. Таким чином, в системі K' обидва фотоелементи спрацюють одночасно в момент часу $t'_1 = t'_2 = t'$. Розглянемо тепер цю ситуацію з точки зору спостерігача в системі K. Швидкість світла також буде однаковою в усіх напрямах, але шляхи, які пройде світло до фотоелементів A і

B будуть різними, фотоелемент A рухається (відносно системи K) назустріч світловому сигналу, а фотоелемент B – уздовж напряму поширення сигналу. Тому в системі K сигнал пройде в точку A раніше, ніж у точку B.

Припустимо, що координаті x'_1, у системі K' відповідає координата x у системі K, аналогічно координаті x'_2 відповідає координата x_2. З точки зору спостерігача в системі K фотоелемент A спрацьовує в момент

$$t_1 = \frac{t'_1 + v \, x'_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t' + v \, x'_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

а фотоелемент B – у момент

$$t_2 = \frac{t'_2 + v \, x'_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t' + v \, x'_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Розглянемо

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{v/c^2 \left(x'_2 - x'_1\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (6.18)$$

Із виразу (6.18) випливає, що коли одночасні події в системі K' роз'єднані в просторі ($x'_1 \neq x'_2$), то в системі K' вони не будуть одночасними ($t_1 \neq t_2$). Якщо $t_2 - t_1$ стане від'ємною, то це свідчить про зміну черговості подій, тобто в одних системах подія *1* випереджатиме подію *2*, а в інших, навпаки, подія *2* випереджатиме подію *1*. Це можливо лише для подій, які не перебувають у причинному взаємозв'язку. Причиннопов'язані події (наприклад, постріл і попадання кулі) у жодній системі відліку не можуть обмінятися місцями і завжди подія, яка є причиною, випереджатиме наслідок. Таким чином, за великих швидкостей $v \to c$ події, одночасні в одній системі відліку, можуть виявитися неодночасними в інших системах, тобто одночасність є відносним поняттям.

6.4. Ефект відносності часу

Той факт, що події, які відбуваються одночасно в одній системі відліку, можуть не бути одночасними в іншій системі, дає можливість вважати, що й сам час не є абсолютним і протікає залежно від вибору системи відліку. Порівняємо протікання часу в різних інерціальних системах відліку. Для вимірювання часу, як відомо, використовується годинник, який є приладом, побудованим на тому чи іншому періодичному процесі. Розглянемо так званий світловий годинник-стержень із двома плоскими дзеркалами на кінцях, між якими переміщується короткий світловий імпульс (рис. 6.4). Період такого годинника дорівнює інтервалу часу між двома послідовними моментами, коли світловий імпульс досягає певного дзеркала.

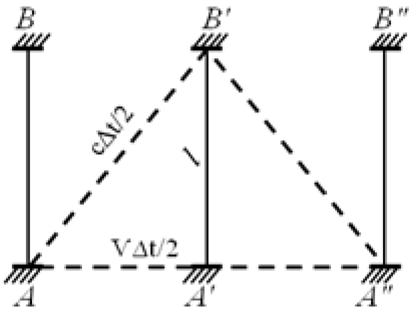

Рис. 6.4

Уявимо собі систему відліку K', яка рухається відносно деякої інерціальної системи відліку K вздовж осі x зі сталою швидкістю v. Розмістимо світловий годинник нерухомо в системі K' і зорієнтуємо його перпендикулярно до напряму руху системи K'. Період світлового годинника в системі K'

$$\Delta t_0 = \frac{2l}{c}.$$

де l – відстань між дзеркалами в системі K'.

У системі K відстань між дзеркалами також дорівнює l, оскільки поперечні розміри тіл, як буде показано пізніше, незмінні в різних інерціальних системах відліку.

Унаслідок руху системи K' світловий імпульс відносно системи K пройде за період інший шлях (лінія $AB'A''$), оскільки за той час, коли світловий імпульс досягне верхнього дзеркала, нижнє зміститься на деяку відстань вправо. Таким чином, світлу знадобиться більше часу, щоб пройти відстань між дзеркалами. Позначимо Δt – період годинника, що рухається відносно системи

K (рис. 6.4).

Із прямокутного трикутника $AB'A'$ маємо за теоремою Пифагора:

$$l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2,$$

звідки

$$\Delta t = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Оскільки $\frac{2l}{c} = \Delta t_0$, то

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (6.19)$$

Величина $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ менша за одиницю, тому $\Delta t >> \Delta t_0$. Проміжок часу Δt_0, обчислений у системі, де годинник нерухомий, називають власним часом.

Таким чином, Δt залежить від швидкості руху v однієї системи відліку відносно іншої. Цей висновок можна також сформулювати так: годинник, який рухається відносно інерціальної системи відліку, йде повільніше від годинника, який перебуває в стані спокою. Ця залежність є істотною для швидкостей v, близьких до швидкостей світла c. У класичній механіці $v << c$ і, як випливає з рівняння (5.19), $\Delta t = \Delta t_0$, тобто плинність часу не залежить від стану руху.

Релятивістський ефект сповільнення перебігу часу експериментально підтверджується в спостереженнях за мікрочастинками мюонами. Мюони – це елементарні частинки, маса яких дорівнює 207 масам електронів, а заряд дорівнює заряду електрона і може бути як додатним, так і від'ємним. Мюони утворюються під дією космічних променів у верхніх шарах атмосфери на висоті приблизно 20...30 км. Середній час існування мюона $\Delta t_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}\, c$. Якби час існування мюона не залежав від швидкості, то, рухаючись навіть зі швидкістю, близькою до швидкості світла, мюони проходили б невеликі відстані:

$c\cdot\Delta t_0 = 600\,{}^{м}\!/\!_{c}$, не досягаючи земної поверхні, де їх спостерігають. У системі відліку, пов'язаній із Землею, час існування мюонів Δt_0 згідно з (6.19) значно перевищує Δt_0 і є достатнім для того, щоб мюони змогли досягти поверхні Землі.

6.5. Ефект відносності довжини

Розглянемо питання про відносність просторових інтервалів (довжина, відстань).

У системі відліку K', яка рухається відносно системи K зі сталою швидкістю v, в стані спокою перебуває деякий стержень. Нехай він розташований уздовж осі x'. Координати кінців стержня x'_1 і x'_2 в цій системі відліку не залежать від часу. Довжина стержня $l_0 = x'_2 - x'_1$ у системі K' називається власною. Визначимо, якою буде довжина цього самого стержня, якщо вимірювати її в системі відліку K. Для спостерігача в системі відліку K стержень рухатиметься зі швидкістю v. Щоб виміряти довжину стержня, який рухається, спостерігач у системі K має за годинником у своїй системі одночасно відмітити на осі x положення його кінців x_2 та x_1. Їх різниця $l = x_2 - x_1$ визначає довжину стержня в системі K. Але координати x_1 та x_2 пов'язані з координатами x'_1 і x'_2 співвідношеннями Лоренца

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - {}^{v^2}\!/\!_{c^2}}}; \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - {}^{v^2}\!/\!_{c^2}}}.$$

Тоді власна довжина стержня

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - {}^{v^2}\!/\!_{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - {}^{v^2}\!/\!_{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - {}^{v^2}\!/\!_{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - {}^{v^2}\!/\!_{c^2}}}.$$

Довжина стержня в системі K

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - {}^{v^2}\!/\!_{c^2}}.$$

Отже, лінійний розмір тіла в напрямі його руху скорочується відносно системи відліку K в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ разів і є меншим від власної довжини тіла l_0 ($l << l_0$). Найбільшою є довжина стержня в тій системі відліку, відносно якої тіло перебуває в стані спокою. Цей результат називають лоренцівським скороченням.

Із перетворень Лоренца (6.17) випливає, що $y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1$ і $z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1$, тобто поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху і є однаковими відносно всіх інерціальних систем відліку.

За малих швидкостей руху, якщо $v << c$, як випливає із (6.20), то $l \approx l_0$, тобто довжина тіла є абсолютною і не залежить від руху системи в класичній механіці.

6.6. Інтервал між двома подіями

Розглянемо події *1* і *2*, які в інерціальній системі відліку K відбуваються відповідно в точці $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ у момент часу t_1 і в точці $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ у момент часу t_2. У системі відліку K' ці події відбуваються в точці $A\left(x'_1, y'_1, z'_1\right)$ у момент часу t'_1 і в точці $B\left(x'_2, y'_2, z'_2\right)$ у момент часу t'_2. Позначимо: $l_{12}^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2$ - квадрат відстані між точками A і B у системі K; $l'_{12} = \left(x'_2 - x'_1\right)^2 + \left(y'_2 - y'_1\right)^2 + \left(z'_2 - z'_1\right)^2$- квадрат відстані між точками A' і B' у системі K'.

За допомогою перетворень Лоренца легко довести, що

$$l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2 = l'^2_{12} - c^2 l'^2_{12}, \tag{6.21}$$

де $t_{12} = t_2 - t_1$, $t'_{12} = t'_2 - t'_1$- проміжки часу між подіями в обох системах відліку.

Величину

$$S_{12}=\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}^2} \tag{6.22}$$

називають інтервалом між двома подіями.

Рівність (6.19) показує, що інтервал між цими двома подіями однаковий в будь-яких інерціальних системах відліку:

$$S_{12}=S'_{12}=inv. \tag{6.23}$$

Тобто інваріанта величина.

Інтервал $S_{12}=\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}^2}$ може бути дійсним $S_{12}^2>0$, уявним $S_{12}^2<0$ і дорівнювати нулю.

Якщо $S_{12}^2<0$, то $|l_{12}|>c|t_{12}|$. Такий уявний інтервал називають просторово подібним. У цьому разі розглядувані події не зможуть впливати одна на одну, оскільки сигнали не можуть поширюватись зі швидкістю, яка перевищує c. Ці події не можуть бути причинопов'язаними. Для подій, відокремлених просторовоподібними інтервалами, існує система відліку, де вони можуть відбуватись одночасно: якщо $t'_{12}=0$, то інтервал $c^2t_{12}^2-l_{12}=-l'_{12}$, якщо $S_{12}^2>0$, то $|l_{12}|\le c|t_{12}|$. Такий дійсний інтервал називають часоподібним. Події, відокремлені цим інтервалом, можуть бути причиннопов’язаними. Для таких подій не існує систем відліку, в яких вони відбуваються одночасно: якщо $t'_{12}=0$, то інтервал стає уявним. Це суперечить визначенню часоподібного інтервалу, який має бути дійсним. Розвиток цього твердження дає змогу показати, що причина ніколи не може бути раніше за висновок.

6.7. Перетворення швидкостей. Релятивістське правило додавання швидкостей

Перетворення швидкості в разі переходу від однієї інерціальної системи в іншу в класичній механіці відбувається згідно з правилом (6.2)

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_0;\ v_x=v_x'+v_0;\ v_y=v'_y;\ v_z=v'_z$$

для випадку, коли система K' рухається вздовж осі x зі сталою швидкістю v_0.

У релятивістській механіці це правило вступає всупереч з принципом сталості швидкості світла. Справді, коли припустити, що в системі K' швидкість світла $v'=c$, то в системі K згідно з правилом (6.2.) додавання швидкостей у класичній механіці $v_x=c+v_0$, тобто швидкість світла буде перевищеною. Знайдемо нові правила перетворення швидкостей, які відповідатимуть другому постулату теорії відносності.

Скористуємося перетвореннями Лоренца:

$$x=\frac{x'+v_0t'}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}};\ \ y=y';\ \ z=z';\ \ t=\frac{t'+{v_0}/{c^2}\,x'}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}}.$$

Продиференціюємо ці рівняння:

$$dx=\frac{dx'+v_0dt'}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}};\ \ dy=dy';\ \ dz=dz';\ \ dt=\frac{dt'+{v_0}/{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}}.$$

Поділивши вирази для dx, dy і dz на dt одержимо

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+v_0dt'}{dt'+\frac{v_0}{c^2}dx'}=\frac{\frac{dx'}{dt'}+v_0}{1+\frac{v_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}};$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy'\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{dt'+\frac{v_0}{c^2}dx'}=\frac{\frac{dy'}{dt'}\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{1+\frac{v_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}};$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{dt'+\frac{v_0}{c^2}dx'}=\frac{\frac{dz'}{dt'}\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{1+\frac{v_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Ураховуючи, що $\frac{dx}{dt}=v_x$; $\frac{dx'}{dt'}=v'_x$ і аналогічно

$$\frac{dy}{dt}=v_y;\ \ \frac{dy'}{dt'}=v'_y;\ \ \frac{dz}{dt}=v_z;\ \ \frac{dz'}{dt'}=v'_z,$$

одержуємо формули для перетворення швидкостей в теорії Ейнштейна:

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} v'_x}; \; v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v'_x}; \; v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v'_x}. \tag{6.24}$$

Аналогічно для переходу із системи K в систему K'

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}; \; v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}; \; v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}. \tag{6.25}$$

За малих швидкостей $v << c$ (якщо $\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \to 1$) з (6.24) одержуємо вирази для додавання швидкостей у класичній механіці. Припустимо, що в системі K' уздовж осі x поширюється світло зі швидкістю $v'_x = c$. Знайдемо швидкість світла в системі K. З (6.24) одержуємо

$$v_x = \frac{c + v_0}{1 + \frac{v_0 c}{c^2}} = c$$

Швидкість світла в системі K дорівнює c, як і в системі K'. Таким чином, правило додавання швидкостей у релятивістській механіці (6.24), (6.25) перебуває у відповідності з постулатом Ейнштейна постійності швидкості світла.

6.8. *Другий закон Ньютона та імпульс в релятивістській механіці*

Із принципу відносності релятивістської теорії випливає, що рівняння, які описують рух тіл під дією сил, мають бути однаковими в усіх системах відліку, тобто інваріантними відносно перетворень Лоренца. Це стосується також законів збереження. Як виявилось, для замкненої системи релятивістських частинок закон збереження імпульсу класичної механіки $\vec{p} = m\vec{v}$ не виконується. Для виконання закону збереження імпульсу в релятивістській механіці необхідно внести зміну у вираз для імпульсу.

Розглянемо випадок зіткнення двох частинок. Нехай у деякій інерціальній системі відліку K назустріч одна одній рухаються дві однакові частинки *1* і *2* зі швидкістю v під кутом α до осі x (рис. 6.5).

Припустимо, що відбулось абсолютне пружне зіткнення. Якщо складова швидкості руху першої частинки вздовж осі y до зіткнення була - v_y, то після зіткнення вона стає такою, що дорівнює v_y. Проекції імпульсу першої та другої частинок на вісь y до зіткнення відповідно $-mv_y$ та mv_y. Повний імпульс системи з двох частинок за напрямом y до зіткнення $mv_y - mv_y = 0$. Після зіткнення проекції імпульсів першої та другої частинок на вісь відповідно mv_y та $-mv_y$. Сумарний імпульс після зіткнення у напрямі y також дорівнює нулю. Аналогічно можна показати, що й для напряму x імпульс даної системи не змінюється. Отже, в системі K закон збереження імпульсу виконується (рис. 6.6) .

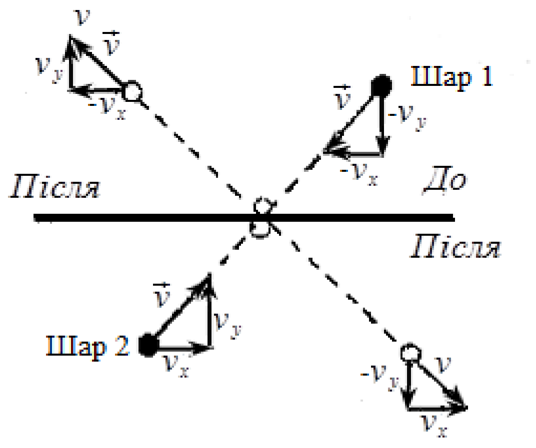

Рис. 6.5

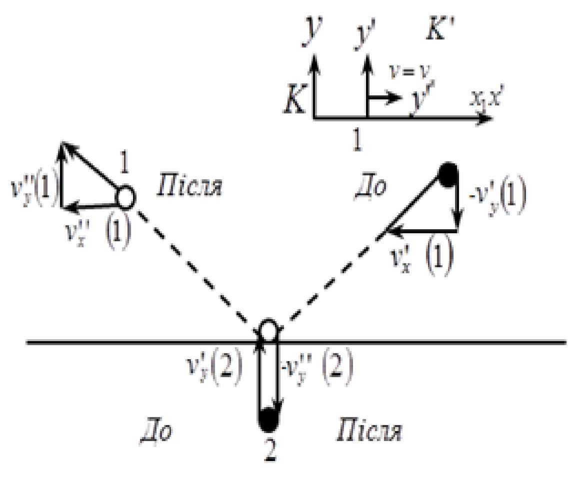

Рис. 6.6

Розглянемо картину зіткнення з точки зору спостерігача, який перебував в стані спокою в системі K', що рухається із швидкістю $v = v_x$ відносно системи K (рис 6.6). Тут v_x– проекція на вісь x швидкості другої частинки до зіткнення. Унаслідок такого вибору системи K' друга частинка матиме тільки

y компоненту швидкості (рис. 6.6). Якщо в системі K швидкість дорівнює v_y, то з рівняння релятивістського додавання швидкостей випливає, що

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{1-v\frac{v_x}{c^2}}.$$

Запишемо y – компоненти швидкостей частинок до зіткнення в системі K'. Ураховуючи, що $v = v_x$:

$$-v'_y(1) = \frac{-v_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x^2}{c^2}};$$

$$v'_y(2) = \frac{v_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x^2}{c^2}}.$$

Після зіткнення

$$v''_y(1) = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x^2}{c^2}};$$

$$v''_y(2) = -\frac{v'_y\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}{1-\frac{v_x^2}{c^2}}.$$

Звідси випливає, що сумарний імпульс у напрямі y до і після зіткнення неоднаковий. У той самий час імпульс уздовж осі x зберігається: $v'_x(1) = v''_x(1)$. Отже, вираз, в якому імпульс пропорційний до швидкості $\vec{p} = m\vec{v}$, не може забезпечити виконання закону збереження імпульсу в різних системах відліку. Звідси випливає, що або закон збереження імпульсу є неінваріантним до перетворювань Лоренца, або існує інше визначення імпульсу, закон збереження якого справджується в усіх інерціальних системах відліку.

Одержимо вираз імпульсу, який буде інваріантним до перетворень Лоренца. Згідно з перетвореннями Лоренца переміщення Δy вздовж осі y однакові в різних системах відліку. Але час Δt, який витрачається на проходження відстані Δy, залежить від вибору системи відліку. Отже, складова швидкості $v_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ буде різною в різних системах.

Для вимірювання проміжку часу скористаємось уявним годинником, якийozташовано на частинці. Цей годинник вимірюватиме власний час частинки Δt_0. Згідно з (6.19)

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}\,,$$

звідки

$$\frac{\Delta y}{\Delta t_0} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\sqrt{1-{v^2}/{c^2}} = \frac{v_y}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}}.$$

Оскільки $\dfrac{\Delta y}{\Delta t_0}$ однакове в різних системах відліку, то y компонента вектора $\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}}$ однакова в усіх системах відліку, які відрізняються лише складовою їх швидкості вздовж осі x. Помноживши вектор $\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}}$ на масу частинки m_0, одержимо релятивістський імпульс

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}}, \tag{6.26}$$

де m_0 – маса покою частинки.

Проекція вектора $\vec{p}$ на вісь y зберігатиметься в будь-якій інерціальній системі відліку.

У цьому прикладі вісь координат була розташована симетрично так, щоб складова швидкість вздовж осі x жодної з частинок не зазнала зміни. Тоді згідно з (6.26) p_x зберігатиметься.

Таким чином, закон збереження імпульсу в релятивістській механіці справджується, якщо імпульс визначається виразом (6.26). За малих швидкостей $\frac{v}{c} << 1$ одержуємо вираз для імпульсу в класичній механіці: $\vec{p} = m_0 \vec{v}$.

Другий закон Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ виявляється інваріантним до перетворень Лоренца, якщо під імпульсом тіла вважати $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$.

Рівняння

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right) \tag{6.27}$$

є основним рівнянням релятивістської динаміки.

6.8. Співвідношення між енергією та масою в спеціальній теорії відносності

Знайдемо вираз для кінетичної теорії енергії матеріальної точки в релятивістській механіці. Приріст кінетичної енергії матеріальної точки dE_K в разі переміщення на відстань $d\vec{r}$ дорівнює роботі $\vec{F} d\vec{r}$, яка виконується силою $\vec{F}$, що діє на матеріальну точку в разі цього переміщення:

$$dE_K = \delta A = \vec{F} d\vec{r}$$

або

$$dE_K = \left(\vec{F} \vec{v} \right) dt, \tag{6.28}$$

оскільки $d\vec{r} = \vec{v} dt$, де $\vec{v}$ – швидкість руху точки.

Підставивши (6.27) в (6.28), одержимо

$$dE_K = \vec{v} d\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{\vec{v}\left(m_0 d\vec{v}\sqrt{1-v^2/c^2} + m_0\vec{v}d\vec{v}\left(\frac{vdv}{c^2}\right)\left(1-v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)}{1-v^2/c^2} =$$

$$= \vec{v}\left(\frac{m_0 d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_0\vec{v}\left(vdv/c^2\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Ураховуючи, що $\vec{v}d\vec{v} = vdv$, дістаємо

$$dE_K = \frac{m_0 d\left(v^2/2\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_0 v^2 d\left(v^2/2c^2\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{m_0 d\left(v^2/2\right)\left(1-v^2/c^2+v^2/c^2\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_0 d\left(v^2/2\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c^2\cdot m_0 d\left(v^2/c^2\right)}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\frac{3}{2}}} = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Проінтегрувавши одержане співвідношення, знайдемо

$$E_K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + const, \qquad (5.29)$$

де $const$ – стала інтегрування.

Сталу інтегрування визначимо за умов, що коли швидкість $v = 0$, то кінетична енергія тіла також дорівнює нулю: $E_K = 0$. Із (6.29) одержуємо $const = -m_0c^2$.

Стала інтегрування m_0c^2 має одиницю енергії і оскільки вона визначається при $v = 0$, то одержала назву енергії спокою тіла:

$$E_0 = m_0c^2.$$

Щоб з'ясувати фізичний зміст енергії спокою, розглянемо деякі експериментальні дослідження, наприклад взаємодій електрона та позитрона (двох частинок з однаковими масами спокою та протилежними за знаком зарядами). В результаті взаємодії електрон і позитрон перестають існувати, перетворюючись на електромагнітне γ випромінювання. Як виявилось, енергія утвореного γ-кванту дорівнює сумі енергій позитрона та електрона, у тому числі і їх енергії спокою. Наявність енергії спокою дає змогу будь-яке тіло розглядати як деякий резервуар енергії, яка може перетворитися в будь-які інші види енергії. Таким чином, вираз (6.29) для релятивістської кінетичної енергії при введенні поняття енергії спокою набуває вигляду

$$E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2. \qquad (6.30)$$

За малих швидкостей при $v << c$

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Одержимо вираз для кінетичної енергії в класичній механіці. У виразі для кінетичної енергії (6.30) позначимо $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Це значення маси m одержало назву релятивістської маси тіла. Перепишемо рівняння (6.30) у вигляді

$$E_K = mc^2 - m_0 c^2, \qquad (6.31)$$

або

$$mc^2 = E_K + m_0 c^2. \qquad (6.32)$$

Права частина рівняння (6.32) є сумою кінетичної енергії та енергії спокою $E_0 = m_0 c^2$, величина mc^2 у лівій його частини дорівнює сумі кінетичної енергії та енергії спокою, яку називають повною енергією тіла E : $E_к + m_0 c^2 = E$.

До повної енергії тіла, як і до його енергії спокою, не входить потенціальна енергія в зовнішньому силовому полі. Таким чином, повна енергія тіла (системи)

$$E = mc^2. \qquad (6.33)$$

Ця формула Ейнштейна виражає один з найбільш фундаментальних законів природи - закон взаємозв'язку релятивістської маси та повної енергії E тіла. Зменшення повної енергії тіла (системи) супроводжується еквівалентною зміною його маси $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$. У ході звичайних макроскопічних процесів маса тіл змінюється дуже мало і її неможливо виміряти.

В ядерній фізиці вперше вдалось експериментально виявити та підтвердити закон взаємозв'язку маси й енергії. Це зумовлено тим, що ядерні процеси й процеси перетворення елементарних частинок супроводжуються досить великими змінами енергії, які можна порівняти з енергією спокою самих частинок.

6.9 Співвідношення між енергією та імпульсом

Знайдемо залежність між енергією та імпульсом у релятивістській динаміці. Як відомо, енергія та імпульс визначаються співвідношеннями відповідно

$$E = mc^2, \qquad (6.34)$$

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (6.35)$$

де $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; $\vec{v}$ – швидкість руху тіла.

Піднесемо співвідношення для енергії й імпульсу (6.34) та (6.35) до квадрату і помножимо на c^2 (6.35). Співвідношення набудуть вигляду

$$E^2 = m^2c^4; \; p^2c^2 = m^2v^2c^2.$$

Віднявши від рівняння (6.34) рівняння (6.35), дістанемо

$$E^2 - p^2c^2 = m_0{}^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = m_0^2 \cdot c^4 .$$

Таким чином, одержуємо зв'язок енергії й імпульсу:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 . \qquad (6.36)$$

Маса спокою m_0 та швидкість світла у вакуумі c сталі в усіх інерціальних системах. Ці величини інваріантні до перетворень Лоренца. Отже, енергія E й імпульс p змінюються в разі переходу від однієї інерціальної системи до іншої, але різниця $E^2 - p^2c^2$ зберігається сталою в усіх системах відліку. Ця важлива особливість знайденого зв'язку енергії та імпульсу:

$$E^2 - p^2c^2 = const = inv$$

Знайдемо з (6.36) релятивістську енергію:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} .$$

Звідси випливає, що релятивістська енергія притаманна навіть таким матеріальним об'єктам, маса спокою яких дорівнює нулю ($m_0 = 0$). Таким об'єктом є частинка світла фотон.

Енергія фотона $E = pc$, а імпульс $p = \frac{E}{c}$.

Це означає, що потік фотонів має спричинювати тиск. Тиск світла вперше виміряв Лебедєв.

Спеціальна теорія відносності Ейнштейна є однією з фундаментальних теорій XX ст.. Її значення не вичерпується тим, що за її допомогою можна одержати більш точні результати, особливо при великих швидкостях. Важливішим є те, що спеціальна теорія відносності змінила наш світогляд. Поняття простору та часу, які вважалися абсолютними, насправді виявилися відносними та взаємопов'язаними. Суттєвої зміни зазнали також уявлення про масу та енергію. Спеціальна теорія відносності стала елементом загальної культури людства.

Запитання

1. Особливості поведінки подвійних зірок.

2. Перший та другий постулати Ейнштейна.

3. Перетворення Лоренца.

4. Відносність одночасності подій у різних системах відліку

5. Ефект відносності часу.

6. Експериментальне підтвердження релятивістського ефекту сповільнення перебігу часу.

7. Власна довжина стержня. Ефект відносності довжини.

8. Інтервал між двома подіями. Види інтервалів.

9. Правило додавання швидкостей в теорії відносності.

10. Релятивістський імпульс.

11. Другий закон Ньютона в теорії відносності.

12. Енергія спокою тіла, її фізичний зміст.

13. Закон взаємозв'язку релятивістської маси та повної енергії E тіла.

Список літератури:

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. Навчальний посібник для студентів вищих тех. і пед. закладів освіти. Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик; За ред. І.М. Кучерука –К.:Техніка, 1999. –536с.

2. Иродов И.Е. Механика. Основые законы / И.Е. Иродов – 6-е изд., испр. –М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. –309с.

3. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. / И.В. Савельев –М.: Наука, 1970. –508с.

4. Тэйлор Э.Ф. Физика пространства-времени / Э.Ф. Тэйлор, Дж.А. Уилер – 2-е изд., дополн. –М.: Мир, 1971. –318с.

5. Угаров В. А. Специальная теория относительности / В. А. Угаров – 2-е изд., дополн. –М.: Книга по требованию, 2013. –384с.

Рекомендований до перегляду відеоматеріал:

6. https://www.youtube.com/watch?v=JlKXspW7tDQ

7. https://www.youtube.com/watch?v=Ai6LhlVtlwE

https://www.youtube.com/watch?v=yiAvgMRJBWE